

BAIRRAL, M. A. Semelhança na 7ª série: algumas dificuldades. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, nº 34, p. 35-64, 1998.

Semelhança na 7ª série: algumas dificuldades

Marcelo Almeida Bairral, Instituto de Educação - UFRRJ

1. Introdução

Pretende-se aqui apresentar uma pesquisa realizada durante dois anos numa escola particular de Niterói-RJ, cujo objetivo foi identificar dificuldades apresentadas por alunos de 7ª série (28 alunos com idade entre 12-13 anos), no processo de construção do conceito de semelhança e, a partir desta análise, propor uma intervenção no processo ensino-aprendizagem de matemática.

A importância de se estudar o conceito de semelhança justifica-se pelo fato deste estar relacionado ao cotidiano do aluno através da ampliação e redução de fotos, na construção de maquetes e plantas baixas, em alguns modelos para o conceito de números racionais, etc. As idéias de semelhança estão incluídas em várias partes do currículo escolar e este tópico não pode mais ser trabalhado apenas na 8ª série, nem ficar reduzido apenas ao estudo de triângulos. Tal ensino deve explorar e aprofundar os saberes matemáticos envolvidos (por exemplo, o de proporcionalidade), estabelecer relações com outros saberes e também levar em consideração o desenvolvimento da linguagem do aluno.

Serão apresentadas neste artigo, algumas atividades com as respostas dos alunos/grupos, seguidas da análise das mesmas. Finalizando, destaca-se que a dificuldade dos alunos estava relacionada ao trabalho com as estruturas multiplicativas e, para o professor ressalta-se a importância de refletir constantemente sobre sua prática pedagógica num processo contínuo de ação-reflexão-ação, estabelecendo efetivamente uma relação dialética com o(s) seu(s) alunos(s).

2. O Método

A metodologia escolhida foi a qualitativa e o pesquisador foi o próprio professor da turma. Os alunos trabalharam individualmente, em pequenos grupos e as discussões eram feitas com a turma toda em vários momentos.

Para a análise dos dados obtidos, embasou-se nos recentes resultados de pesquisas em geometria que se referem especificamente ao processo ensino-aprendizagem de semelhança e na perspectiva construtivista de Vygotsky, ao reconhecer a importância da interação entre os sujeitos no processo de construção do conhecimento e, Vergnaud no seu enfoque sobre o trabalho com as estruturas multiplicativas.

Os materiais utilizados foram o TANGRAM, o geoplano, a calculadora e o pantógrafo, uma vez que cada um deles pôde abordar aspectos relevantes da semelhança de figuras. Cada atividade foi organizada e classificada de acordo com o modelo de Schwartz (1989).

Tal classificação engloba: **objetivos cognitivos** (abrangem os conceitos envolvidos no desenvolvimento da atividade), **objetivos técnicos** (se preocupam com a utilização operacional desses conceitos), **ferramentas** (material utilizado como apoio para o melhor desenvolvimento das atividades propostas). O **tipo**, resulta da classificação em função do fim a que se propõe: atividade de fixação, aprendizagem de conceitos, atividade aberta ou de avaliação. Procurou-se também especificar se a atividade contém questões trabalhando a medida de forma contínua ou discreta. O **caráter** nos diz se a atividade desenvolvida foi realizada em aula (individual ou grupo) ou em casa (individual ou grupo).

Os dados foram coletados através de: entrevistas(semi-estruturadas) gravadas com a professora de artes e com os alunos, atividades elaboradas pelo professor ou pelos próprios alunos (individualmente ou em seu grupo), questões seguidas de justificativas por escrito e do “diário de bordo”. O “diário de bordo” era o lugar onde o pesquisador fazia as transcrições, observações, etc. De acordo com Powell (1995), para o pesquisador-professor o material escrito pelo aluno como justificação – explicitação do seu processo de pensamento – é fundamental para a retroalimentação. A partir destas informações, o pesquisador-professor pode, então, reelaborar as atividades e reorientar sua prática pedagógica.

Cada conjunto de atividades com o mesmo objetivo chamou-se **Episódio**, que para facilitar a coleta e a análise dos dados, subdividiu-se em **Protocolos**. Os Episódios foram: Plantas Baixas, Atividades Complementares: Estrutura Aditiva x Multiplicativa, Circuito de geometria, Figuras Semelhantes, Avaliação do Professor e Auto-avaliações dos Alunos. Para não estender muito o relato, omitiremos as perguntas e respostas feitas individualmente aos alunos na entrevista.

3. Apresentando e comentando algumas atividades

Diversas atividades foram propostas aonde os alunos puderam manipular, discutir, criar e verificar a semelhança de figuras planas, pois através de uma multiplicidade de situações um conceito é melhor aprendido, uma vez que cada uma delas permite a abordagem de aspectos relevantes do conceito.

3.1 PLANTAS BAIXAS

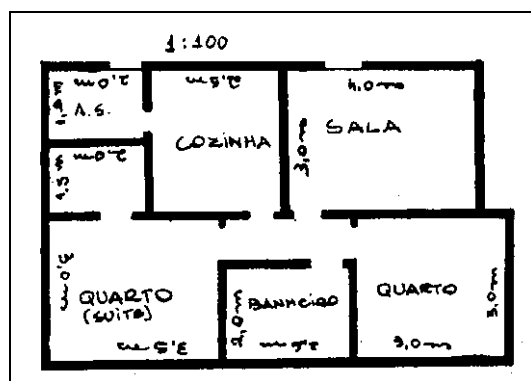


Figura 1

Esta primeira ficha de atividades foi relativa a planta baixa. A idéia foi do professor de matemática, que também era o pesquisador e autor da pesquisa, no sentido de desenvolver junto com a professora de artes um trabalho que explorasse concretamente o conceito de escala. As plantas baixas aparecem diariamente em revistas e jornais diversos, sua utilização também pode permitir a exploração e construção de vários conceitos matemáticos, dentre eles: figuras planas, áreas e perímetros, proporções, sistema métrico decimal e escala.

Na maioria dos livros de matemática do Brasil, o conceito de escala é conteúdo da 6ª série na unidade de razão e proporção, a escala também é um conceito muito utilizado nas aulas de geografia para construção e análise de mapas e, segundo os professores de geografia, os alunos apresentam muita dificuldade em compreender e aplicar tal conceito.

Sendo assim, preferiu-se utilizar a planta baixa como um dos recursos, uma vez que para desenhar uma planta baixa em escalas diferentes de 1:100, o aluno deve perceber que existe uma relação de proporcionalidade entre os segmentos homólogos e a não alteração (congruência) nos ângulos correspondentes; que são os atributos relevantes do conceito de semelhança de figuras planas.

Após o planejamento desta atividade, juntamente com a professora de artes, propôs-se aos alunos que desenhasssem uma planta baixa de sua moradia ou de alguma moradia imaginária, utilizando uma escala de 1:100. Desta forma a interação das aulas de Artes e Matemática começava de fato a acontecer. A classificação da atividade foi a seguinte:

<p>Objetivo cognitivo: noções de: escala, redução, unidade de medida de comprimento. Objetivo técnico: representação gráfica de uma figura através de uma escala. Ferramentas: material de desenho e calculadora. Tipo: aprendizagem (construção) de conceitos e trabalhando a medida de forma contínua. Caráter: sala de aula (individual) e casa (individual). Tempo: 06 aulas</p>
--

Primeiramente os alunos fizeram o esboço (rascunho) em papel comum e, logo após, o entregaram à professora de artes para fazer as devidas observações (ou correções); em seguida os alunos fizeram o desenho definitivo em papel vegetal.

Como era esperado, o desenho das plantas baixas na escala 1:100 não apresentou dificuldades, pois o que é *metro* no real se transforma em *centímetro* no desenho. O próximo passo agora era desenhar a planta em escalas diferentes (1:50, 1:75, 1:200). Aqui os alunos (7ª série, 1995) apresentaram dificuldades para entender a mudança de escala. Com isso, preferiu-se interromper o trabalho e buscou-se levantar, através de outras atividades, que dificuldades os alunos apresentavam nesse processo de mudança de escalas, conforme veremos a seguir.

3.2 ATIVIDADE DAS MALAS

Esta atividade foi assim classificada.

<p>Objetivo cognitivo: noções de: ampliação e redução, frações e escala. Ferramentas: cópia da atividade elaborada. Tipo: aprendizagem de conceitos, abordando a medida de forma contínua Caráter: sala de aula (grupo). Tempo: 03 aulas.</p>
--

Questão: Ampliação e Redução.

Você já deve ter ouvido falar de ampliar e reduzir uma foto. O que acontece com uma figura quando a ampliamos? E quando a reduzimos? O que que muda e o que que fica o mesmo quando ampliamos uma figura?

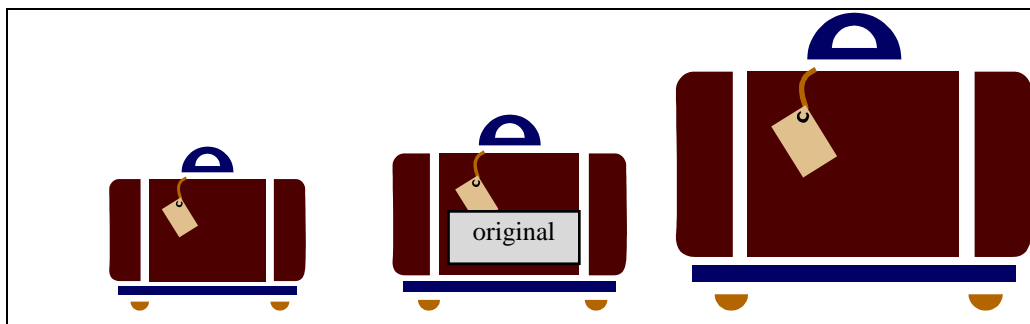


Figura 2

Algumas respostas dos grupos:

- Quando ampliamos, os detalhes aparecem. Quando reduzimos, não são muito visíveis.
- O tamanho muda mas a forma continua a mesma.
- Quando a ampliamos ela fica maior que o seu tamanho original, e quando a reduzimos ela fica menor que o seu tamanho original. Mas ambas “guardam” suas características originais.
- Ela cresce. Diminui. A forma continua a mesma e o tamanho fica diferente.
- Ela aumenta. Ela diminui. Muda o tamanho, mas a figura é a mesma.
- Ampliamos → a foto aumenta; Reduzimos → a foto diminui. O tamanho muda e a forma continua a mesma.

Como pode ser confirmado nas respostas acima, percebeu-se, através desta questão, que de um modo geral os alunos possuíam – ainda que intuitivamente – o conceito de semelhança. Surge, neste contexto, uma das funções primordiais da escola: desenvolver os conceitos que a criança traz consigo, que foram construídos no decorrer de sua vida prática ou nas suas interações sociais. Nesta visão o professor, a partir dos conceitos intuitivos dos alunos, procura estendê-los e formalizá-los através de situações mais complexas. O uso da linguagem natural também é importante para explicitar os *teoremas em ação* (idéias implícitas por trás da solução de um problema) envolvidos no raciocínio do aluno e, também, como instrumento para descrever e analisar o conhecimento intuitivo do aluno.

A próxima pergunta agora era: No exemplo acima, não sabemos de quanto a mala foi reduzida, nem de quanto foi ampliada. Você poderia achar um modo de sabermos isso? Qual?

Algumas respostas dos grupos:

- Sim. A mala foi ampliada 1,6 a mais que a original e foi reduzida 0,5mm a menos que a original.
- Sim. Vendo a diferença de tamanho entre as duas malas com a original.
- Nós temos que multiplicar o que ela cresceu (ou diminuiu) na vertical pelo que ela cresceu (ou diminuiu) na horizontal.
- Sim, medindo-a e fazendo uma escala.

Estas respostas forneceram uma pista do tipo de estrutura de pensamento que estava sendo utilizada pelos alunos, e então levantou-se a hipótese de que eles estariam utilizando as estruturas aditivas (vide as duas respostas iniciais). Os alunos não pareciam pensar, por exemplo, em “quantas vezes” a mala pequena cabe na mala grande e vice-versa. Vergnaud (1983), salienta que as estruturas multiplicativas, embora tenham elementos comuns com as aditivas, diferem delas o suficiente para serem tratadas como um novo campo conceitual, pois, numa estrutura multiplicativa, está pressuposta uma relação de proporcionalidade entre os pares de números correspondentes. Apesar de suas relações com as estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas têm peculiaridades e não são redutíveis às estruturas aditivas.

Nessa questão se o aluno, para saber de quanto a mala foi ampliada (ou reduzida), pensou que é só considerar o seu tamanho original e somá-lo a um certo número ($T_f = T_i + \infty$), diz-se que ele utilizou a **estrutura aditiva**, enquanto que se ele, ao considerar o tamanho inicial verificar que existe um número – coeficiente de semelhança – que expressa “a quantidade de vezes” que a figura foi ampliada ou reduzida ($T_f = \infty T_i$), diz-se que ele utilizou a **estrutura multiplicativa**.

Como esta atividade não foi suficiente confirmar esta primeira pista – de que os alunos estavam utilizando a estrutura aditiva – elaborou-se a questão seguinte visando o trabalho com as estruturas multiplicativas, que constou de três segmentos: um original, sua ampliação (em dobro) e redução (na metade), como abaixo.

3.3 SEGMENTOS PROPORCIONAIS

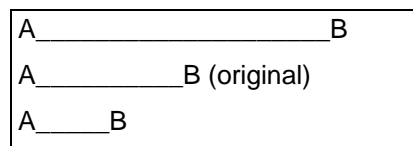


Figura 3

Nesta questão com segmentos proporcionais em “dobro” e “metade”, as respostas dos alunos “mais dois centímetros, mais um centímetro” também funcionavam e sendo assim, continuava-se a não poder concluir se os alunos utilizavam as estruturas aditivas ou as multiplicativas. Pela resposta dos grupos tudo indicava que eles pensavam utilizando as estruturas aditivas, mas ainda não se podia ter certeza.

Como o conceito de semelhança envolve uma relação proporcional, não fazia sentido trabalhar a sua construção (que os alunos possuíam intuitivamente) sem que os alunos fizessem uso das estruturas multiplicativas, sendo assim elaborou-se “atividades complementares” visando a desenvolver tais estruturas.

Segundo Vergnaud (1989), as atividades para estudar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas nos alunos classificam-se em: **atividades de comparação** (que envolvem estimativas e não se preocupam com a quantificação das razões, apenas com comparações do tipo “maior que”, “menor que”, “igual a”) e **atividades de completar com números que estão faltando** (que envolvem proporções simples e proporções múltiplas). Atividades destes dois tipos foram elaboradas e constituíram o *Episódio 2* de nossa pesquisa. Eis alguns exemplos:

3.4 AMPLIANDO E REDUZINDO EM APENAS UMA DIMENSÃO

Esta atividade objetivou trabalhar mais um aspecto do conceito de escala, entretanto, ampliando e reduzindo um segmento (largura da sala de aula da própria turma), trabalhando assim em apenas uma dimensão.

De acordo com Schliemann(1995, p.160), o desenho em escala talvez constitua uma situação que favorece a compreensão de dois aspectos importantes do modelo matemático em questão: a idéia da existência de uma relação constante entre dois pares de números (ao invés de uma diferença constante, como no caso das estruturas aditivas) e a proporcionalidade entre a dimensão do que é representado e sua representação”.

Foram distribuídas folhas de papel milimetrado para cada aluno e se pediu que representassem a largura da sala (5m, aproximadamente) nas seguintes escalas: 1:50, 1:100 e 1:200 (conforme a figura 4 abaixo), indicando todos os cálculos. Após o exercício individual colou-se as respostas de um mesmo grupo numa única folha e pedimos que cada grupo fizesse a(s) devida(s) correção(ões) e observasse as relações entre as diferentes representações.

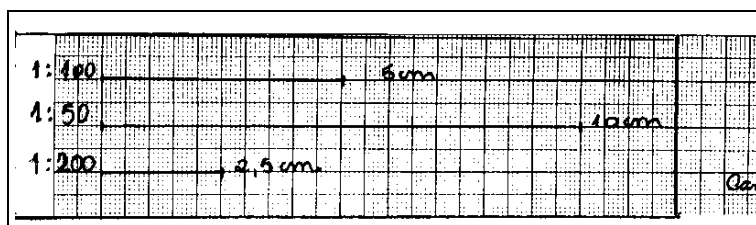


Figura 4

Classificamos esta atividade da seguinte maneira:

Objetivos cognitivos: noções de escalas e frações.
Objetivo técnico: representar um segmento em escalas diferentes.
Ferramentas: papel milimetrado.
Tipo: aprendizagem de conceitos, trabalhando a medida de forma contínua
Caráter: casa (individual) e sala de aula(grupo).
Tempo: 02 aulas.

No primeiro instante os alunos não sabiam como fazer. Percebeu-se mais uma vez que o questionar era uma inovação na sala de aula e resolveu-se, portanto, sugerir alguns caminhos, tais como: *Os cálculos, as indicações e o traçado de cada segmento estão corretos? Como você pode comparar o tamanho de cada segmento? Que relação existe entre o tamanho do segmento e a escala utilizada para representá-lo?*

A dificuldade que os alunos apresentaram também estava ligada à dificuldade em escrever suas observações, que revelou dados os quais sem ela seria impossível de coletar, já que é difícil para um professor entrevistar 27 alunos a cada aula. Como as questões foram grupadas por objetivos temáticos, foi possível encontrar padrões que remeteram a esta ou aquela estrutura de pensamento.

Algumas respostas:

Grupo 1: “Observamos que quando a escala diminui o tamanho aumenta, quando a escala aumenta o tamanho diminui”.		
↓	1:50 = 10 cm	1:50 = 10 cm ↑
↓	1:100 = 5 cm(x2)	1:100 = 5 cm(:2) ↑
↓	1:200 = 2,5 cm(x4)	1:200 = 2,5 cm(:4) ↑

Este grupo percebeu que, dependendo da escala utilizada o tamanho do desenho muda. A direção das setas para baixo e para cima, feitas por eles, indica a reversibilidade com que o grupo trabalhou com a operação de multiplicação e divisão. De acordo com sua justificativa pareceu que os alunos não “falaram”, mas indicaram (nos cálculos) as relações “dobro”, “quádruplo”, “metade” e “quarta parte”. Isso nos leva a crer que eles perceberam, mas ainda não formalizaram.

Grupo 5: “ O segmento que representa a escala 1:200 cabe 2 vezes dentro da de 1:100. O segmento da escala 1:200 cabe 4 vezes dentro da de 1:50”.

Grupo 6: “A escala 1:100 cabe duas vezes na escala 1:50. A escala 1:200 cabe 4 vezes na 1:50 e 2 vezes na escala 1:100”.

Grupo 7: “O segmento 1:50 é o dobro do segmento 1:100 que é o dobro do segmento da escala 1:200”.

Estes três últimos grupos demonstraram fazer confusão entre a escala e o segmento que a representa, por exemplo, quando o grupo 5 diz que “cabe duas vezes dentro da de 1:100”. Tal justificativa leva a pensar que, para o grupo, pode não estar claro que o segmento é uma representação da escala. Acredita-se que uma resposta do tipo “cabe duas vezes dentro do segmento que representa a escala de 1:100” estaria mais completa.

A discussão dessa atividade foi feita em vários momentos: primeiro com o professor analisando o desenho de cada aluno individualmente. Após a análise, o professor propôs aos alunos que colassem todos os desenhos em uma única folha e em seguida fizessem as devida(s) observação(ões) e correção(ões). Novamente o professor recolheu as respostas dos grupos, fez sua análise e devolveu-as, porém trocando os trabalhos entre os grupos, para que fizessem novamente suas intervenções, desta vez no trabalho dos seus colegas. Os alunos gostaram muito e se empenharam bastante na realização destes três momentos do trabalho propostos pelo professor.

A questão seguinte fez parte do *Protocolo* elaborado com base nos exercícios para o raciocínio de frações de Gimenez (1995). De acordo com a classificação proposta por Vergnaud (1989), este é um tipo de atividade de comparação, uma vez que o aluno ao realizá-la não necessita explicitar numericamente as razões, mas fazer comparações do tipo maior/menor que a metade, etc.

3.5 MÁQUINAS DEFORMADORAS

A escolha desta atividade também se deu por vários motivos: trazer questões diferentes (não tradicionais) para o trabalho escolar, apresentar uma situação de aprendizagem diferente para o trabalho com semelhança e permitir um trabalho relacionando ampliação e redução de segmentos com frações.

Sua classificação foi a seguinte:

Objetivos cognitivos: estrutura multiplicativa e frações. Objetivo técnico: – Ferramentas: máquinas deformadoras. Tipo: aprendizagem de conceitos e atividade aberta Caráter: sala de aula(grupo) e casa(individual e grupo). Tempo: 04 aulas.

Primeiramente a ficha foi deixada como dever de casa individual. Na aula seguinte foi recolhida pelo professor e após a análise da mesma confirmou-se a hipótese de que os alunos se apoiavam mais nas estruturas aditivas; poucos utilizavam estruturas multiplicativas.

Após a análise, selecionou-se algumas das respostas para que os alunos discutissem sobre a resposta melhor e mais completa. Novamente o professor devolveu as fichas aos alunos que, agrupados para a discussão de sua resposta com a dos outros colegas foram repensando suas respostas e reescrevendo-as, quando necessário, para a correção com a turma toda na aula seguinte.

Esta ficha além de fornecer pistas sobre a não utilização pelos alunos das estruturas multiplicativas, também permitiu explorar outros conceitos importantes como o de fração, comparação e equivalência de frações. Eis uma questão e algumas respostas individuais.

Questão: Estes exercícios são de máquinas deformadoras, algumas espicham algumas reduzem. As máquinas A e B reduzem o bastão de entrada. Qual das saídas dessas máquinas que reduz mais? Por quê?

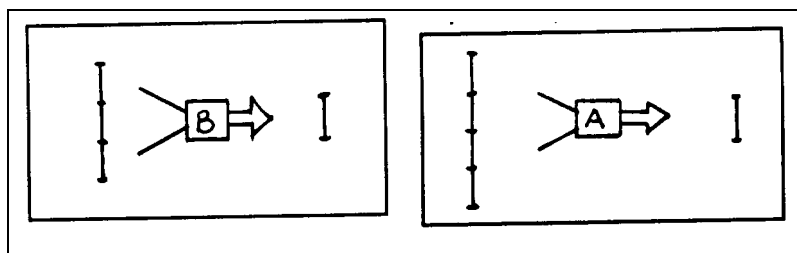


Figura 5

- “A. A primeira entrou com 4 saiu com 1 e a segunda entrou com 3 e saiu com 1, logo a primeira reduz mais”.
- “A primeira reduz mais porque começou com um pedaço maior”.
- “A. Porque o seu bastão possuía 4 pedaços e a outra três, se as duas foram reduzidas em um pedaço a A reduziu mais”.
-

De um modo geral percebeu-se com as respostas acima que os alunos estão começando a estabelecer alguma relação entre as grandezas (por exemplo, quando dizem de 4 para 1 ou de 3 para 1). Porém, apesar de todos os alunos terem respondido que a máquina A reduzia mais, não se podia afirmar que eles tinham clareza do porquê da redução.

Por exemplo, a explicação da última resposta não dá certeza se o aluno pensou: $4 - 1 = 3$, $3 - 1 = 2$ (estrutura aditiva) ou $1/4 < 1/3$ (estrutura multiplicativa). Será que o aluno respondeu a máquina A porque $3 > 2$? Com isso percebeu-se que apesar da resposta correta, o problema não havia terminado.

Várias questões deste tipo foram propostas e discutidas nesta atividade, inclusive a elaboração e apresentação de novas questões pelos alunos. Mesmo com a riqueza das discussões entre alunos e professor, não era possível afirmar que os alunos já trabalhavam confortavelmente com as estruturas multiplicativas, pois segundo Vergnaud (1989) essas estruturas se desenvolvem no sujeito entre 7-18 anos de idade.

A atividade proposta a seguir é, segundo a classificação de Vergnaud(1989), uma atividade de completar com números que estão faltando e sua resolução envolve proporções simples e proporções múltiplas.

3.6 COMPLETANDO TABELAS

Classificação da atividade:

Objetivos cognitivos: estrutura multiplicativa, operações com números, frações e as diferentes representações de um número.

Ferramentas: tabelas.
Tipo: aprendizagem de conceitos, trabalhando a medida de forma contínua.
Caráter: casa(individual).
Tempo: 02 aulas

As tabelas seguintes foram deixadas como tarefa de casa (individual) para os alunos completarem. Esta atividade constituiu-se como mais uma a desenvolver a utilização das estruturas multiplicativas e, como se verá mais adiante, a maioria dos alunos justificou suas respostas utilizando tais estruturas.

O *Protocolo* das máquinas deformadoras serviu também como início de um processo de concretização do pensamento do aluno; pois sabe-se que não é apenas com uma atividade que vamos admitir que ocorreu a construção daquele conceito. Sendo assim, o aluno vai se apropriando ora de uma idéia, ora de outra; até perceber o atributo relevante do conceito. Este processo não foi e não é linear, sequencial e finito. Eis a atividade:

Complete cada tabela abaixo e justifique sua resposta.

Tabela1

Entra	Sai
1	50
2	...
3	...
...	200
1,5	...
6
...	175

Tabela2

Entra	Sai
1	70
2	140
...	210
2,5	...
...	490

Tabela3

Entra	Sai
2	5
4	10
6	...
1	...
...	15
...	20

Algumas respostas individuais dos alunos:

Aluno 1:

Tab. 1: "Porque se de 1 sai 50; de 2 sai 100(o dobro); de 3, 150 sempre acrescentando ou tirando 50. A não ser 1,5 aí é $1 = 50 +$ a metade de 50 que é 25, sai 75. 3,5 'e o mesmo tipo".

Tab. 2: "É o mesmo tipo de cálculo, só muda o valor do 1 que é 70; de 2 sai 140, o dobro; no 3 acrescenta 70".

Tab. 3: "É a mesma coisa. Se de 2 sai 5, de 1 tem que sair a metade, sai então 2,5; 4 é duas vezes maior que dois então é 10 e 6 é duas vezes maior que 4 então é 15".

Aluno 2:

Tab.1: " $1 \times 50 = 50$ portanto, $2 \times 50 = 100$, $3 \times 50 = 150$, $200 : 50 = 4$ e assim por diante".

Tab.2: " $1 \times 70 = 70$ portanto, $2 \times 70 = 140$, $210 : 70 = 3$, $2,5 \times 70 = 210(?)$ e assim por diante".

Tab.3: " $2 \times 2,5 = 5$ portanto, $4 \times 2,5 = 10$, $6 \times 2,5 = 15$, $1 \times 2,5 = 2,5$, $15 : 2,5 = 6$ e assim por diante".

Aluno 3:

Tab.1: "Cada 1 vale 50, assim multiplicamos ou dividimos conforme o desejado".

Tab.2: "cada 1 vale 70, assim multiplicamos ou reduzimos conforme o desejado.

Tab.3: "Cada 2 vale 5, assim multiplicamos ou reduzimos conforme o desejado".

$2 + 2 + 2 = 5 + 5 + 5 = 15$

$5 : 2 = 2,5$

$$2+2+2+2=5+5+5=20''.$$

É interessante perceber a diversidade de representações que os alunos utilizam. O aluno 3, por exemplo, percebeu que para achar o 6 era só desmembrar de 2 em 2 quantas vezes fosse necessário, pois cada 2 vale 5 (não se preocupou com o resultado de $2+2+2+2 \neq 5+5+5+5$). Aparentemente, os alunos expressaram-se utilizando a estrutura multiplicativa e o aluno 3 associou a multiplicação como uma soma de parcelas iguais.

Esta atividade de tabela, além de contribuir para o desenvolvimento da estrutura multiplicativa, também proporcionou oportunidades para trabalhar a representação de um número, o trabalho com os números racionais e as operações, pois, ao se trabalhar com as estruturas multiplicativas uma das dificuldades geralmente apresentada, está ligada à manipulação e à representação de números racionais (Lesh, 1992).

Ao terminar esta sequência de atividades, obteve-se na maioria dos alunos uma resposta mais positiva, isto é, uma resposta mais próxima da que se queria que eles tivessem, mas que não necessariamente estaria correta, pois não se poderia esperar que, apenas com essas atividades, o aluno tivesse completamente desenvolvido as estruturas multiplicativas.

Dando prosseguimento à pesquisa elaborou-se várias atividades aonde os alunos puderam manipular, discutir, criar e verificar a semelhança de figuras planas. Para realizar estas atividades, utilizou-se o PANTÓGRAFO para fazer ampliação e redução de figuras por um ponto externo, o TANGRAM e o GEOPLANO para trabalhar com polígonos/diagonais/perímetros/áreas etc, PAPEL QUADRICULADO para fazer a ampliação e redução e figuras. A utilização desta variedade de atividades justifica-se, uma vez que acredita-se que conceito é melhor aprendido através de uma multiplicidade de situações que dão sentido à esse conceito.

Após a realização destas atividades, retornou-se ao trabalho com as plantas baixas, isto é, a sua construção nas escalas 1:50, 1:70 e 1:35. Nesse caminhar, chegou-se então ao trabalho específico com o conceito de semelhança. Eis um exemplo.

3.7 AFINAL: SEMELHANTE OU PARECIDO ?

A questão seguinte fez parte de um teste realizado individualmente em sala de aula durante duas aulas (1h40min). Após a aplicação, o professor recolheu-os e na aula seguinte fez uma entrevista com cada aluno para esclarecer algumas de suas respostas e depois fez a discussão e correção com a turma. Este teste de verificação constou de quatro questões de semelhança encontradas em livros didáticos de 8ª série. Com estas questões, esperava-se verificar se os alunos conseguiriam utilizar os conceitos trabalhados nos *Episódios* anteriores, isto é, transferi-los a este novo contexto.

Classificou-se este *Episódio* da seguinte maneira:

<p>Objetivo Cognitivo: conceito de figuras semelhantes e razão de semelhança. Objetivos Técnicos: verificar se os alunos aplicaram os conhecimentos obtidos nos episódios anteriores, identificar figuras semelhantes e utilizar a razão de semelhança Ferramenta: teste (xerocado) Tipo: avaliação Caráter: sala de aula (individual) Tempo: 04 aulas</p>
--

A seguir, a questão e algumas respostas.

Questão: Estes retângulos são semelhantes? Justifique sua resposta.

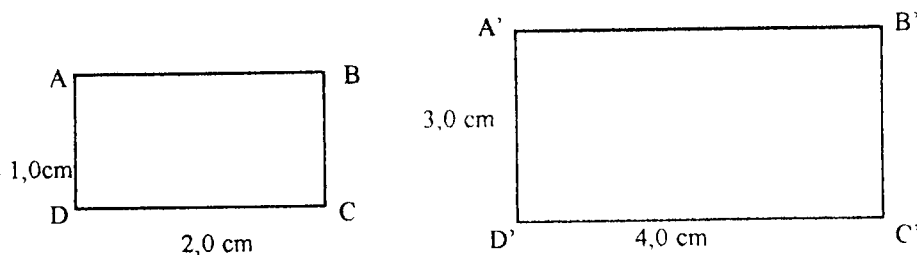


Figura 6

- “Não. Porque os ângulos são os mesmos, tem 90° e apenas os lados foram alterados. Um lado foi ampliado ou reduzido $3x$ e o outro foi ampliado ou reduzido $2x$ ”.
- “Eles não são semelhantes porque o lado AD “e de $1,0\text{cm}$ e o lado DC é de $2,0\text{cm}$, então na segunda figura o lado AD aumentou 3 vezes, ou seja, ele foi para $3,0\text{cm}$ e o lado DC aumentou duas vezes, ou seja, foi para $4,0\text{cm}$ então eles não aumentaram na mesma proporção”.
- “Não, pois suas medidas não equivalem. Por exemplo: $1,0 \times 3 = 3,0$; $2,0 \times 3 = 6,0$ enquanto foi $4,0$ ”.
- “Sim. Porque os ângulos continuaram os mesmos só mudou o tamanho($2x$) e os lados continuaram os mesmos só que ampliados”.
- “Sim. Porque aumentou numa proporção de 1. As medidas dos retângulos passaram de $1,0\text{cm}$ para $3,0\text{cm}$ e de $2,0\text{cm}$ para $4,0\text{cm}$. Isso significa que aumentou em $2x$ ”.
- “São, pois os lados aumentaram a mesma medida e na mesma proporção. Aumentou $2x$, $1 \rightarrow 3$ e $2 \rightarrow 4$ ”.

Como se vê, o trabalho com as estruturas multiplicativas deve ser continuado juntamente com a exploração do conceito de figuras semelhantes, pois, como pode ser observado, alguns alunos justificaram sua resposta apenas esboçando o conceito, enquanto outros perceberam a não proporcionalidade dos lados, mas justificaram utilizando um pensamento aditivo. Sendo assim, o professor não pode partir do princípio de que o seu aluno já domine o conceito; uma vez que ele pode apenas decorar e não conseguir aplicá-lo corretamente.

Torna-se, portanto, necessário mais atividades, maior variedade de situações sobre o mesmo tema e mais discussão com a turma toda sobre o conceito de semelhança. Sugere-se, então, que esse trabalho exploratório das noções de semelhança, seja feito desde as séries iniciais, de maneira que o aluno possa ir percebendo e, nas séries mais avançadas (8^{a} série, por exemplo), possa abstrair os atributos relevantes do conceito de semelhança. Com esta questão pode-se concluir que:

1. Ao trabalhar com retângulos, o professor deve estar atento ao fato de que os alunos não se preocupem em verificar a congruência dos ângulos, uma vez que todos os seus ângulos são congruentes, o que não lhe permitirá verificar se o aluno percebe a natureza conjuntiva da definição de semelhança e, também se o aluno já possui os atributos relevantes do conceito;
2. Os retângulos, apesar de aparentemente parecidos, podem não ser semelhantes. O professor deve a todo momento, explorar as diferenças entre a linguagem matemática e a linguagem corrente e reconhecer a importância desta última para o trabalho com os conceitos matemáticos. Na diversidade de respostas dos alunos nesta questão, surgiram expressões que enriquecerão o trabalho com semelhança e cujo significado o professor deverá trabalhar bastante, seja na linguagem corrente, seja na matemática, tais como: “*proporção, congruente, equivalentes, mudar de acordo, escalas, aumentar na mesma medida, aumentar na mesma proporção, proporcional, proporção diferente, estruturas parecidas e lados alterados, etc*”.

4. Considerações finais

⇒ **Quanto `a semelhança de figuras**

O ensino de semelhança de figuras vem sendo realizado sem aprofundar os aspectos nele envolvidos e sem relacioná-lo com os demais conteúdos, ou seja, as noções são apresentadas de forma comprimida com definições formais e alguns exemplos seguidos de exercícios, numa sequência que não explora a riqueza e complexidade que esse conhecimento pode propiciar. Procuramos nesta investigação construir instrumentos que envolvessem alguns aspectos contidos na noção de semelhança, aprofundando-os e na medida do possível, buscando integrá-los a outras áreas.

Na medida em que as atividades eram aplicadas, os dados eram obtidos e o professor podia analisá-los e verificar como estava se processando a estruturação do pensamento do aluno e que tipo de dificuldades ele (ou o seu grupo) estava apresentando. Quando os alunos respondiam alguma questão e não se conseguia entender o desenvolvimento de seu raciocínio, fazia-se uma entrevista de maneira a compreender a elaboração de seu pensamento.

Acredita-se que um trabalho interdisciplinar, envolvendo as disciplinas de Artes, História, Geografia e Matemática é bastante possível e pode contribuir na construção de um saber menos compartimentalizado.

⇒ **Quanto aos conteúdos pré-requisitos**

O professor deve estar esclarecido da diferença entre a “*operação multiplicação*” e a “*estrutura multiplicativa*”. Isto porque é objetivo do ensino de matemática de 1ª `a 4ª série do 1º grau que o aluno domine as quatro operações, e por isso, o professor de matemática – que possui uma visão de currículo estruturado de forma lógica e sequencial – parte deste pressuposto e continua este trabalho nas séries subsequentes admitindo que os conteúdos ensinados anteriormente são pré-requisitos (cumpridos e alcançados). Porém, como o pesquisador foi o próprio professor da turma no ano anterior e acompanhou-a, pode ver que este tipo de pensamento nem sempre nos ajuda a ensinar. No caso do ensino de semelhança não basta ao professor apenas acreditar que o aluno já domina a operação multiplicação, considerada um pré-requisito para a aprendizagem desse conceito.

⇒ **Quanto `a linguagem:**

As palavras possuem diferenças e semelhanças de significado na linguagem corrente e na linguagem matemática. Exemplificando, a palavra *semelhante* na linguagem corrente é sinônimo de *parecido* ou algo que tem a *mesma forma* mas matematicamente falando, para que duas figuras sejam semelhantes é necessário que tenham *exatamente a mesma forma*. Nessa visão, é importante também valorizar a linguagem oral e escrita do aluno.

Muitas são as palavras ou expressões que podem surgir para enriquecer o trabalho com semelhança através da exploração do seu significado, dentre elas: *mudar de acordo, proporção, proporcionalmente, mesma proporção, escala, correspondentes, congruentes, dobro, ampliar, reduzir,*

manter, razão, vezes maior, medidas não comuns, medidas multiplicadas, ângulos conservados e lados modificados.

Devido à natureza conjuntiva da definição de semelhança torna-se necessário realizar um trabalho com os juntores E e OU, pois como vimos, os alunos algumas vezes se preocupavam apenas com proporcionalidade dos lados em outras apenas com a correspondência dos ângulos. Diante desta necessidade, este trabalho poderá ser articulado com o professor de Português, já que é importante ter clareza da distinção entre estes conectivos.

⇒ **A proposta didático-pedagógica: professor x aluno(s)**

Ao se optar por esta proposta – que estava voltada para o desenvolvimento do raciocínio num processo de analisar e avaliar os diferentes caminhos escolhidos pelos alunos ou grupos ao resolver as situações propostas – o pesquisador, ao acompanhar a turma durante a 6ª e 7ª séries pode também confirmar o que dizem as teorias cognitivas do processo ensino-aprendizagem: o conhecimento não se dá por transmissão, repetição ou reforço num processo estático e desvinculado da prática social do aluno. Percebeu isso pois sabia que todo o conteúdo programático previsto para a 6ª série tinha sido “cumprido” e, no entanto, pouco ficara para os alunos, uma vez que eles não tinham construído os conceitos envolvidos neste conteúdo.

Apesar da insatisfação do professor com sua prática em sala de aula nos anos anteriores esta sua “frustração” foi importante, despertando-o para a necessidade de mudar sua postura, ou seja, passar a encarar o aluno como sujeito do processo ensino-aprendizagem, reconhecendo suas limitações, despertando o seu interesse e o gosto pela matemática, respeitando sua individualidade e sua maneira de elaborar o pensamento, não priorizando apenas o conteúdo matemático. Sendo assim, para o professor esta proposta resgatou a importância da “fala” na construção cognitiva de um conceito, quando ele valorizava o diálogo e a escrita do seu aluno e, a partir deles procurava fazer as intervenções que achava serem adequadas.

Esta mudança de postura do professor implica em reflexões profundas sobre o que é aprendizagem, qual a sua relação com o ensino e qual o papel dos conteúdos, significações e dos procedimentos de ensino no desenvolvimento das estruturas lógicas e vice-versa.

A mudança de postura desafiou também o aluno para assumir a cada momento um papel questionador, ora no entrosamento com o(s) grupo(s), ora na resolução das atividades propostas, procurando apresentar-lhe a matemática como uma disciplina dinâmica, realmente útil e presente em seu dia-a-dia.

As avaliações de alguns alunos transcritas abaixo sintetizam a intervenção ocorrida:

“Eu achei diferente pois o conteúdo dessa matéria é totalmente diferente do ano passado, principalmente a atividade de ampliação e redução onde no começo tive muitas dúvidas, mas acabei entendendo. A matéria de geometria permite que hajam muitas brincadeiras como tangram, etc. As aulas tem sido divertidas”. RI

“Gostei muito das aulas de geometria, mas em algumas coisas como ampliação e redução com o pantógrafo e quadriculado tenho dúvidas. As aulas de figuras semelhantes foram super legais e fáceis de aprender. As aulas em geral estavam bem elaboradas e criativas, por causa do trabalho em grupo que ajudou muito nos trabalhos. As aulas das plantas, das máquinas deformadoras, tangran e o geoplano também foram interessantes”. HE

“Foi bom, as atividades em grupo pois “várias cabeças pensam melhor que uma”. Algumas atividades foram fáceis e outras mais difíceis. As fáceis sempre são as mais legais. Aprendi várias

coisas úteis, que eu posso utilizar em outros trabalhos. O Tangram é o melhor, pois foi uma atividade mais descontraída. As atividades me serviram para desenvolver meu raciocínio". PR

A “fala” dos alunos aconteceu em trabalhos individuais ou trabalhos em grupo, quando considerava-se o que o aluno falava, analisava-se e devolvia-se com uma nova pergunta para que ele pudesse re-elaborá-la juntamente com seu grupo: os colegas trocavam opiniões, pensavam melhor sobre a adequação ou não de uma solução, ou um colega apresentava uma solução diferente, havia reelaboração; e até mesmo quando o aluno justificava sua resposta.

Este intercâmbio levou a dois pontos importantes: incentivou as crianças a pensarem e a raciocinarem e evitou que se criasse ou reforçasse a idéia de que a matemática é difícil, incompreensível, que poucos (os *experts!*) conseguem aprendê-la e, que só se aprende pela memorização.

Admitindo e reconhecendo como é difícil, mas ao mesmo tempo importante uma mudança de postura e de prática pedagógica, olvidou-se das práticas de ensino tradicionais e buscou-se, assim, romper as relações com elas, preocupando-se com a construção do conhecimento do aluno. E foi neste caminho que **“Buscando Semelhanças Encontramos Mais Do Que Meras Coincidências”**.

5. Referências Bibliográficas

- ABRANTES, P.(1995). **Avaliação e Educação Matemática**. Rio de Janeiro, MEM/USU. Série Reflexões em Educação Matemática(vol.1).
- BAIRRAL, M. A. (1996) **Buscando semelhanças encontramos mais do que meras coincidências**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro, MEM/USU.
- BROUSSEAU, G.(1996) **Os diferentes papéis do professor**. In: *PARRA, Cecília e SAIZ, Irma (org.) Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre, Artes Médicas. Tradução Juan Acuña Llorens
- CAMPOS, A.V.D.S.(1990) **Estruturas Cognitivas e o Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro, Boletim GEPEM nº 26 (p. 73-80).
- CASTRO, E.(1995) **Estructuras Aritméticas Elementales y su modelización**. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica.
- CATALÁ, C.A. et alli.(1991) **Materiales para construir la Geometría**. Madrid, Editorial Sintesis.
- COLL, C.(1992) **Psicología y Curriculum**. Barcelona, Paidós.
- D`AMBRÓSIO, U.(1991). **A matemática e seu entorno sócio-cultural**. In *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educacion Matemática(42)*. Sevilla, Septiembre, (p. 76-79).
- FAINGUELERNT, E.K.(1995) **O Ensino de Geometria no 1º e 2º graus**. Blumenau, A Educação Matemática em Revista, nº 4 (p.45-53).

- _____ et alli (199) **Trabalhando com geometria**. São Paulo, Ática.
- FRANT, J.B.(1994) **Método Qualitativo**. RIMEM 002/94. Rio de Janeiro, MEM/USU.
- GIMENEZ, J.(1995). **Epistemologia dos números racionais**. Rio de Janeiro, Seminário MEM/USU, (mimeo).
- GONZÁLEZ, R.L.(coord.) (1990) **Proporcionalidad Geometrica y Semejanza**. Madrid, Sintesis.
- GROSSI, E.P.(org.) (1993) **Construtivismo Pós-Piagetiano: um novo paradigma sobre aprendizagem**. Petrópolis, Vozes, 1993 (3ª. ed.)
- HERSHKOWITZ, R. (1994). **Aspectos Psicológicos de Aprendizagem da Geometria**. Rio de Janeiro, Boletim Especial GEPEM nº 32.
- IMENES, L.M. e LELLIS, M.C.(1994) **O Currículo Tradicional e o problema: um descompasso**. Blumenau, A Educação Matemática em Revista nº 2 (p.5-12).
- JAKUBOVIC, J. et alli(1992). **Semelhança**. São Paulo, Atual(Pra que serve matemática?).
- KALEFF, A. et alli (1994) **O desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele**. Rio Claro-SP, BOLEMA (p.21-30)
- LESH, R. et alli (1992). **Rational Number, Ratio and Proportion**. *In Handbook of research NCTM* (p.296-333).
- LINDQUIST, M.M. e SHULTE, A.P.(org.)(1994) **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo, Atual. Tradução de Hygino H. Domingues.
- LOPES, M.L.M.L e NASSER, L.(coords.), et alli (1996) **Geometria na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro, Editora da UFRJ.
- MACHADO, N.J. (1991) **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo, Cortez (autores associados).
- _____.(1990) **Semelhança não é mera coincidência**. São Paulo, Scipione(coleção vivendo a matemática).
- MEIRA, L.L. et alli (1993). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife, Editora da UFPe.
- NASSER, L.(1990) **O desenvolvimento do raciocínio em geometria**. Rio de Janeiro, Boletim GEPEM nº 27 (p. 93-99).
- _____. (coord.) et alli (1995). **A Teoria de van Hiele aplicada ao ensino de semelhança**. Rio de Janeiro, UFRJ, (mimeo).
- POWELL, A.B. e LÓPEZ, J.A. **A escrita como veículo de aprendizagem da matemática: estudo de um caso**. New Jersey, Rutgers University, 1995 (Tradução John Manuel Francisco e Arthur Powell). Mimeo.
- SANCHEZ, L.B (1991). **O desenvolvimento da noção de semelhança na resolução de questões de ampliação e redução de figuras planas**. Sao Paulo, USP, Dissertação de Mestrado.
- SCHLIEMANN, A.D.et alli (1995). **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo, Cortez. (9 ed.)
- SCHWARTZ, B.(1989). **The use of a microword to improve the concept image of a function: The Triple Representation Model Curriculum**. Unpublished doctoral dissertation. Israel, Weizman Institute of Science.
- TINOCO, L.A.A.(coord.) et alli (1996) **Razões e Proporções**. Rio de Janeiro, Editora da UFRJ.

VERGNAUD, Gérard (1989) **Multiplicative Structures**. In Hiebert, James e Behr, Merlyn(eds.) **Number Concepts and Operations in the middle grades**.NCTM, vol.2, p.141-161.

_____.(1983) **Multiplicative structures**. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and process*. New York: Academic Press.

_____.(1984) **Understanding proportion, fraction and ratio at the primary level**. Trabalho apresentado no V Internacional Congress on Mathematical Education. Adelaide, Austrália.

6. Endereço para correspondência

UFRRJ/IE/DTPE
LEM (Laboratório de Educação Matemática) Sala 36
Endereço: Antiga Estrada Rio-São Paulo km 47
23851-970 Seropédica -RJ
Tel-fax (021) 682-1841
e-mail: mbairral@ufrj.br