



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Sequência didática sobre semelhança de triângulos no
ambiente Virtual Math Teams

CRISTIANO DE SOUZA BRITO

Seropédica, RJ
Janeiro de 2022

SUMÁRIO

Fazendo o <i>login</i>	1
Sobre o VMT.....	4
Orientações teóricas acerca do ambiente e das tarefas propostas	8
Quanto à natureza da tarefa.....	8
Arrastando, participando e compartilhando significados	8
Atividade 1: Congruência de triângulos.....	12
Atividade 2: Razão de semelhança.....	14
Atividade 3: Casos de semelhança de triângulos	16
Atividade 2 (natureza aberta): Razão de proporcionalidade	17
Atividade 3 (natureza aberta): Casos de semelhança de triângulos	17
Salvando os dados	18
Apêndice I – Mapa conceitual da criação de cursos e salas no VMTcG	23

Fazendo o login

Caro (a) leitor (a), este produto educacional foi desenvolvido com objetivo de apresentar uma sequência didática sobre semelhança de triângulos. Meu nome é Cristiano, sou atualmente professor da rede municipal de Rio Claro, região Sul Fluminense, interior do estado do Rio de Janeiro. Nunca tive experiência em ensinar semelhança com uso de um AGD e também nunca havia participado de um chat envolvendo geometria em ambiente virtual de aprendizagem antes do desenvolvimento da minha pesquisa.

As tarefas apresentadas aqui foram geradas na minha dissertação de mestrado, no ano de 2022, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). A sequência de atividades tem como tema principal a semelhança de triângulos, um tema muito importante para a formação de estruturas cognitivas de alunos e (futuros) professores em aspectos numéricos e geométricos relacionados à proporcionalidade.

O conceito de semelhança de triângulos ocupa espaço privilegiado dentro da própria matemática por estar relacionada a outros conceitos como a homotetia, ampliação e redução de figuras, variação de áreas e volumes (GONZÁLEZ et al., 1997; JACONIANO et al., 2019); na demonstração de teoremas da matemática como Teorema Fundamental da proporcionalidade, Teorema de Tales (PEREIRA, 2017); em relações matemáticas importantes como a relações métricas no triângulo retângulo e invariância das razões trigonométricas (JACONIANO et al., 2019; GONZÁLEZ et al., 1997).

Em situações comuns do dia a dia utilizamos a noção de semelhança ao deslizar os dedos sobre a tela do smartphone para aumentar e diminuir o tamanho de uma figura, sem deformá-la, mantendo sua proporção. Um contraexemplo pode ser observado no uso de programas de edição de imagem ao arrastarmos as extremidades de uma figura apenas vertical ou horizontalmente, e o resultado é a modificação da sua forma. Abaixo foram colocadas duas situações lado a lado, uma ilustrando a preservação da proporção dos lados de uma foto (figura 1a) e a outra alterando apenas a altura da foto (figura 1b).

Figura 1: Ampliação da altura e da largura (esquerda), ampliação apenas da altura (direita)

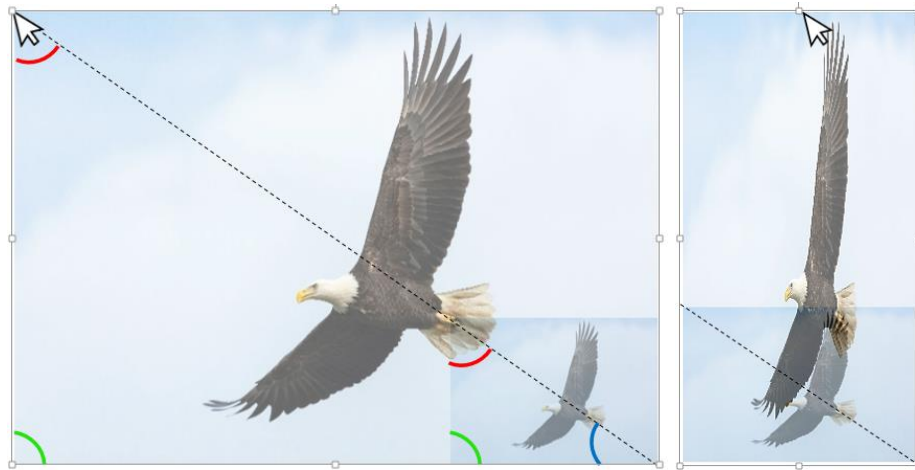


Figura 1a

figura 1b

Fonte: Elaboração própria a partir de imagem gratuita¹, inspirado em Machado (2000, p.18).

Esse exemplo ilustrado acima mostra a figura 1a ampliada tanto em sua altura como em sua largura, ou seja, o ajuste da proporção ocorreu ao se arrastar com o cursor sobre o segmento de reta que é a diagonal do quadrilátero. Já a figura 1b, a ampliação foi aplicada apenas à altura, e seu ajuste não ocorreu sobre a diagonal, obtendo-se uma figura deformada. Com isso queremos ilustrar a importância do estudo da semelhança de triângulos, ilustrada pela figura formada pelas diagonais (Figura 1a), sendo que todos os demais polígonos podem ser decompostos em mais de um triângulo.

Dentre as propriedades envolvidas nesse exemplo, temos a correspondência de pontos de cada figura, a proporcionalidade dos lados correspondentes e igualdade das medidas dos respectivos ângulos internos do triângulo menor e maior formados pela diagonal do quadrilátero.

Os livros em geral definem triângulos semelhantes como aqueles que têm ‘ângulos iguais e lados homólogos proporcionais’. Esta definição se estende literalmente para polígonos. (LIMA, 1991, p. 31)

A semelhança de triângulos se destaca em relação aos demais polígonos, por ser o triângulo o único polígono em que as duas condições que definem a semelhança sempre ocorrem juntas. Isso quer dizer que se os seus respectivos ângulos são iguais, então automaticamente os seus lados também serão proporcionais, e vice-versa (MACHADO, 2000).

Trabalhei uma sequência didática sobre semelhança de triângulos com o público de (futuros) professores utilizando o *Virtual Math Teams* com GeoGebra (VMTcG) durante o período de distanciamento social da pandemia do novo coronavírus em 2020 e 2021. Este ambiente nos possibilitou vivenciar a interação colaborativa, a negociação de conceitos geométricas e se

¹Disponível em: <<https://unsplash.com/photos/NEvS5IHyrIk>>. Acesso em: 09 jan. 2022.

constituiu uma ferramenta potente no desenvolvimento do pensamento de licenciandos e mestrandos que participaram da pesquisa. Compartilho com você a proposta da sequência didática e também algumas orientações sobre o uso do VMT a partir dos resultados da pesquisa e da minha vivência no mestrado que resultaram neste produto educacional. As atividades que compõem a sequência, passaram por um processo de design à medida que foram submetidas aos grupos de participantes da pesquisa.

Ao final da pesquisa de dissertação, decidimos fazer alterações nas frases dos roteiros das tarefas a fim de suavizar o tom autoritário que costumeiramente nós professores inserimos em nossas atividades. Entendemos que esse tipo de ambiente virtual possibilita uma outra forma de aprender, na qual professor e aluno aprendem juntos. Desta forma, amenizamos ao máximo as frases no imperativo, buscando fazer um convite ao aluno no lugar de colocar apenas uma ordem.

O produto está organizado em uma breve apresentação sobre o VMT e suas funcionalidades principais. Organizamos também um documento em formato de apresentação de *Power Point* para auxiliar no primeiro contato com o ambiente virtual, nele orientamos como criar uma sala e um curso.

Na segunda parte apresentamos algumas discussões teóricas que nortearam a implementação da pesquisa e que podem apoiar o professor (a) na aplicação da sequência didática proposta com suas turmas.

Em seguida propomos as tarefas da sequência didática sobre semelhança de triângulos, primeiro as de natureza fechada e em seguida abertas. Em cada tarefa indicamos os tipos de descobertas matemáticas envolvidos na sua resolução ou orientações para a sua aplicação. Para a tarefa 1 e 2 (natureza fechada) apontamos as diferentes formas de arrastar com uso da malha e do controle deslizante.

Encerramos com algumas dicas e recomendações para que você possa tanto utilizar as tarefas propostas em suas turmas como propor tarefas de sua autoria com uso do VMTcG.

Sobre o VMT

O VMT pode ser utilizado gratuitamente por qualquer professor, desde que faça um registro no site e torne-se um facilitador² para ter acesso a todas as suas funcionalidades. O VMT é um ambiente virtual desenvolvido pela equipe liderada por Gerry Stahl e Stephen Weimar (na Drexel University, EUA) e seu intuito tem sido promover a constituição de grupos para interação colaborativa e síncrona na resolução de atividades matemáticas (POWELL; 2014; BAIRRAL; MARQUES, 2016). As pesquisas mais recentes do grupo geraram uma atualização do ambiente VMTcG que agrega uma versão multiusuário do AGD GeoGebra. Na UFRRJ este ambiente tem sido utilizado em disciplinas e pesquisas do Gepeticem, coordenado por Marcelo A. Bairral (IE/DTPE) em parceria com Arthur B. Powell (Rutgers University, Newark, EUA), no âmbito do projeto *Participando, descobrindo e interagindo em ambientes virtuais: Potencializando novas formas de aprendizagem matemática*, financiado pelo CNPq e pela Faperj.

O VMT permite que o usuário crie salas³ independentes, ou que organize cursos com salas separadas por turmas para o planejamento de implementações. É possível criar espaços de trabalho com uso do Desmos ou do GeoGebra, por esse motivo nossa pesquisa ao utilizar o VMT agregado ao GeoGebra indica o nome VMTcG, ou seja, com GeoGebra.

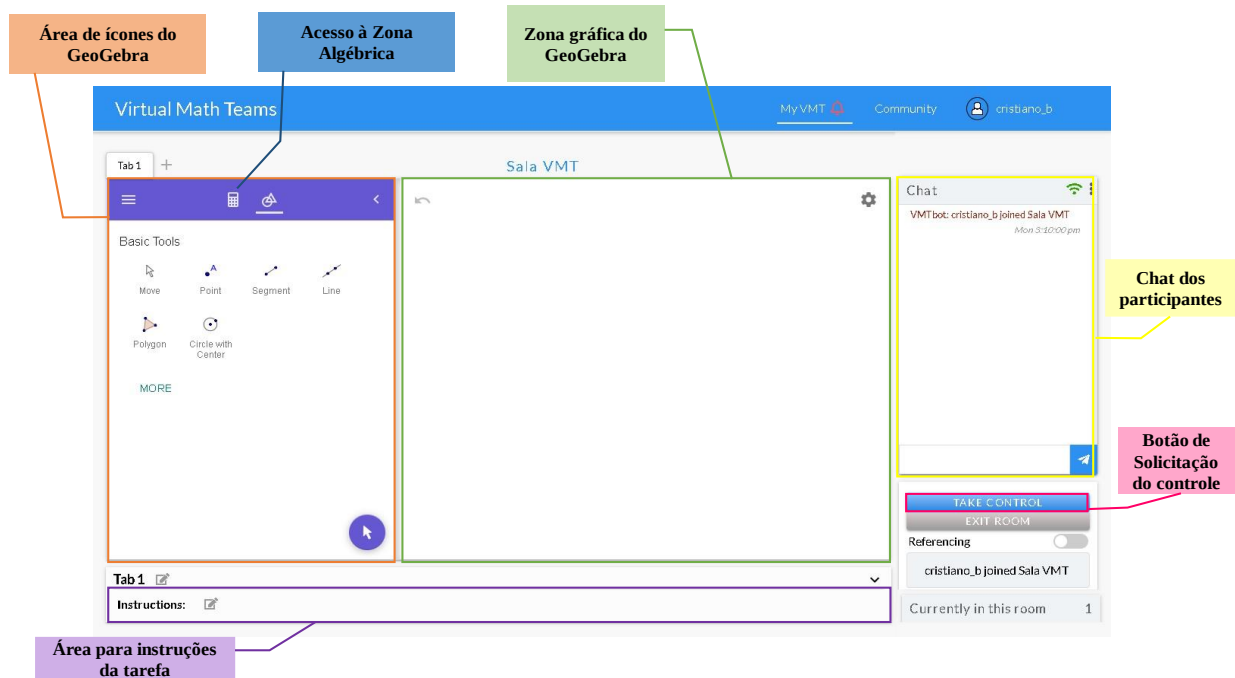
A interface do GeoGebra apresenta na área de trabalho uma seção com ícones⁴ do GeoGebra, a zona gráfica do GeoGebra, zona algébrica, área do chat, botão de solicitação do controle, botão para referência de postagens do chat e zona com informação gerais da sala. A figura 2 apresenta a interface do VMTcG e seus diferentes espaços e funcionalidades.

² Disponível em: <https://vmt.mathematicalthinking.org/>. Acesso em: 03 jan. 2022.

³ Formulamos um documento com orientações para o leitor criar um curso e salas no VMT. Destacamos a necessidade de fazer a sua conta de usuário antes de seguir os passos deste documento Power Point. Coloque o documento em modo de apresentação para conseguir seguir as orientações. Disponível em: <https://1drv.ms/p/s!Ag8vQaRpJoVKzjlB9GMJ1Lu8IA6r?e=L8lWRs>. Vide no Apêndice I – Mapa conceitual da criação de cursos e salas no VMTcG.

⁴ Passaremos a utilizar a nomenclatura ícones para nos referir às ferramentas do GeoGebra.

Figura 2: Subáreas da Interface do VMTcG



Fonte: elaboração própria a partir do ambiente VMT

São disponíveis apenas ao professor/elaborador da sala a possibilidade de modificar as instruções da atividade, seja antes do início ou no decorrer da tarefa. A criação de abas ao clicar no ícone + ao lado de *Tab 1* e a modificação dos rótulos da aba.

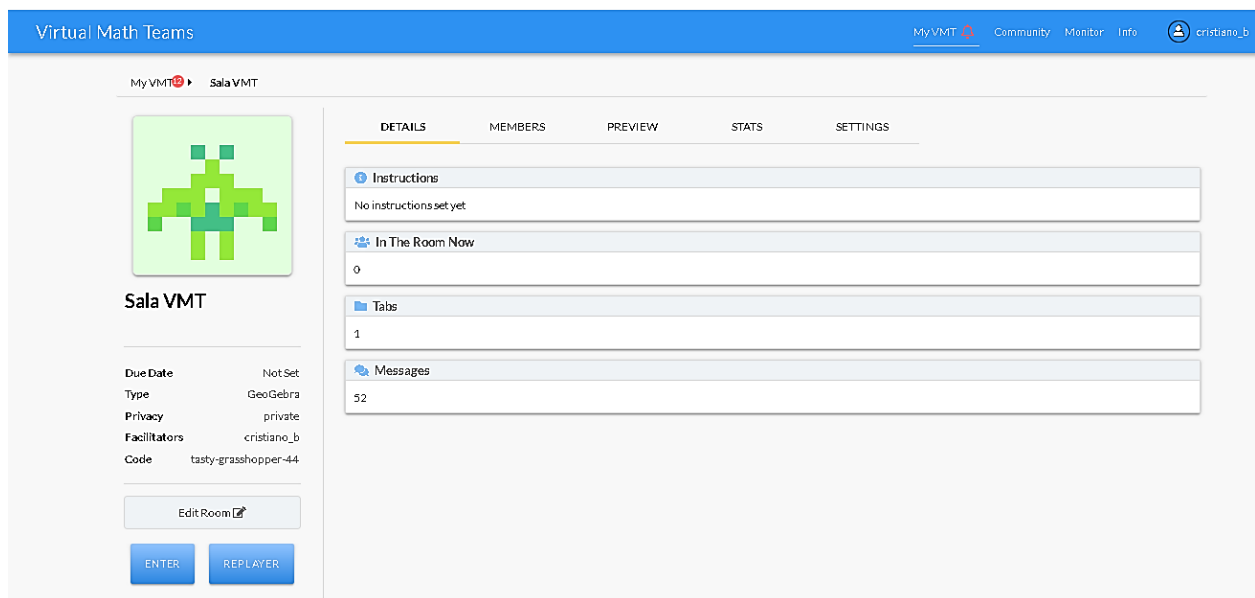
Informações importantes sobre o número de participantes presentes na sala em tempo real são mostradas no canto direito inferior da tela em *Currently in this room*. No caso do registro da figura 2, apenas eu estava na sala e por isso o número 1 (um) aparece ao lado da descrição. A caixa acima deste último, que aparece escrito “Cristiano_b joined Sala VMT”, apresenta informações gerais sobre o último acontecimento da sala. Nessa caixa é informado o último participante a sair ou a entrar na sala, ou a última ação realizada por determinado participante na zona gráfica, ou a postagem referenciada por outros participantes ou ainda o último participante que solicitou o controle.

O botão de solicitação de controle (*Realize/Take*), logo acima da caixa de informações gerais, permite a um usuário por vez utilizar os ícones do GeoGebra para realizar construções na zona gráfica. Caso alguém já tenha selecionado o botão e esteja realizando alguma construção, os demais integrantes do grupo podem solicitar o controle clicando no mesmo botão *Realize/Take*. Neste caso ao acionar o botão *Take control* a mensagem “Can I take control?”, em português “posso assumir o controle?”, é gerada automaticamente no chat.

Esse botão tem uma função dupla permitindo tanto assumir o controle para interagir com o GeoGebra quanto devolver o controle para que os demais integrantes possam realizar modificações na zona gráfica.

Além das funcionalidades básicas citadas anteriormente, a sala do VMT possui duas áreas principais: a janela do GeoGebra (composta pela área de ícones do GeoGebra, a zona gráfica e algébrica) e o chat no qual os participantes interagem através de mensagens escritas.⁵ Todas as funcionalidades descritas têm os dados capturados e salvos em um tipo de nuvem do próprio site, chamado de *Replayer*. Os dados podem ser acessados pelo usuário no menu da respectiva sala criada. A visão geral do menu da sala é apresentada na figura 3.

Figura 3: menu da sala do VMT



Fonte: Captura de tela do site do VMT

Depois que você criou a sala e entrou no menu da sala (figura 3), ao clicar em *Edit room* é possível alterar diversas informações da sala, conforme é mostrado na figura 4.

⁵ Na versão do VMT utilizada na pesquisa (versão atualizada em 06/05/2020), todas as informações desde entrada de algum participante, saída, solicitar controle poluíam muito o chat. Em virtude disso, os desenvolvedores do VMT adicionaram desde meados de 2021 um botão que possibilita esconder ou habilitar as demais informações distintas das postagens dos usuários.

Figura 4: menu de edição de informações da sala do VMT

The screenshot displays the VMT room editing interface. On the left, a sidebar contains a room icon, a text input for the room name 'Sala VMT', another input for the room code 'UFRRJ', a 'Due Date' field, a 'Type' dropdown set to 'GeoGebra', a 'Privacy' section with 'public' and 'private' radio buttons (the latter is selected), a 'Facilitators' list showing 'cristiano_b', and a 'Code' field set to 'Not Set'. Below these are 'SAVE', 'CANCEL', 'ENTER', and 'REPLAYER' buttons. The main panel on the right has four tabs: 'DETAILS' (selected), 'MEMBERS', 'STATS', and 'SETTINGS'. Under the 'DETAILS' tab, there is an 'Instructions' section with a text area containing 'No instructions set yet', an 'In The Room Now' section showing '0' members, a 'Tabs' section showing '1' tab, and a 'Messages' section showing '13' messages.

Fonte: Captura de tela do site do VMT

No menu de edição da sala podemos redigir as instruções para a tarefa (*em instructions*), editar informações básicas (nome, data da implementação, optar pela privacidade da sala e definir uma senha de acesso aos participantes, caso necessário), incluir ou excluir integrantes do grupo (*em members*) e visitar os dados estatísticos (*em stats*) gerados a partir das informações salvas (postagens e ações dos participantes) apresentadas em tabela ou graficamente.

Na tela do *Replayer* encontramos controles semelhantes aos de um reproduutor de vídeo (play, pause, avançar, recuar, configurações de velocidade do vídeo) em uma tela que reproduz as construções e movimentos ocorridos nas abas e simultaneamente os dados registrados no chat durante uma tarefa já concluída. É uma ótima ferramenta para analisar como os alunos interagiram entre eles e com o GeoGebra.

O VMT é um ambiente virtual em constante desenvolvimento e existem algumas limitações que devem ser consideradas. Por se tratar de um sistema robusto, composto pelas áreas de subáreas supracitadas, é exigida uma boa conexão de internet para que a atualização da zona gráfica e das postagens no chat ocorram em tempo real. Ressaltamos que em nossa experiência com o VMTcG em 2020, não conseguimos visualizar em tempo real as construções que eram feitas dentro do GeoGebra agregado ao VMT. Porém, no ano seguinte, em situações que carregamos um arquivo do GeoGebra, antes editado no computador, foi possível visualizar os movimentos na tela de forma síncrona. O VMT pode ser usado em computadores ou smartphones.

Na próxima seção apresentamos algumas discussões norteadoras para a implementação da sequência didática sobre semelhança de triângulos proposta a partir do uso do VMTcG.

Orientações teóricas acerca do ambiente e das tarefas propostas

Elencamos a seguir algumas bases teóricas que embasaram nossa pesquisa e que podem auxiliar o professor para o uso mais consciente do VMTcG e inserção deste na cultura da sala de aula.

Quanto à natureza da tarefa

A tarefas que abordaremos inicialmente são de natureza fechada, isso significa que o foco da atividade está no procedimento de construção e no conteúdo matemático específico, ou seja, mais precisamente nas propriedades que objetivamos que os alunos se atentem (congruência de triângulos, razão de semelhança e caso de semelhança de triângulos AA).

Tarefas de natureza fechada podem ser abordadas em situações na qual os alunos já conhecem alguns conceitos ou procedimentos envolvidos e não se espera que investiguem uma figura em busca de construir relações que estejam fora de um campo “previsto” de exploração e descoberta. O tipo de tarefa de natureza aberta é que desempenha mais esse papel, pois permite ao sujeito ampliar suas ideias matemáticas a partir de construções nem sempre pré-determinadas. A escolha pelo tipo de tarefa é do professor de modo que também reflita sobre o potencial e a particularidade de cada uma no aprendizado.

Nas seções finais apresentamos versões das tarefas 2 e 3 (originalmente fechadas) no modelo de tarefas de natureza aberta. O leitor pode e deve fazer os ajustes necessários a fim de adequar ao perfil da sua turma, de acordo com o tempo disponível e objetivo planejado para a aula. Além do caráter mais livre da tarefa 2, ela também foi pensada de forma a já iniciar com os triângulos construídos e prontos para a investigação desde o início da tarefa.

Arrastando, participando e compartilhando significados

Com base em pesquisadores que tratam sobre o uso de AGD com vistas a configuração do pensamento (ARZARELLO et al., 2002; BUSSI; MARIOTTI, 2008; MARIOTTI, 2000; SALLES; BAIRRAL, 2012) procuramos listar algumas breves orientações que podem auxiliar o professor (a) nas tarefas propostas para desenvolvimento no VMTcG.

Como descrito antes, as tarefas de natureza fechada e aberta enfocam na construção, procedimento e propriedades específicas, ou na investigação de propriedades e relações. Portanto

é muito importante que os alunos estejam atentos ao artefato⁶. Em caso de dúvidas quanto a propriedades e suposições feitas, é importante que eles sejam conduzidos no sentido do artefato a realizar suas descobertas arrastando os pontos livres ou dependentes. Assim, se necessário você poderá intervir, chamando a atenção deles para o artefato ou para alguma parte específica que poderá auxiliá-los a observar as propriedades ou relações pelo próprio feedback fornecido na estrutura matemática embutida no VMTcG. Dessa forma você estará orientando os seus alunos de um contexto do artefato e do seu uso para o contexto matemático.

Durante a atividade é comum a produção de vários signos⁷, estes podem ser signos de artefato (relação íntima com o VMTcG) e signos matemáticos (relação íntima com a matemática). Várias expressões como “o controle deslizante” se apresenta como um signo comum tanto ao contexto matemático como ao contexto do artefato. Essas palavras são signos pivôs que funcionam como dobradiças e podem auxiliar seus alunos a evoluírem do contexto do artefato para o contexto matemático. Logo, são signos muito importantes que você pode utilizar para auxiliar seus alunos a avançarem em atividades matemáticas.

Quanto ao roteiro da tarefa, é importante que os estudantes estejam atentos a ele a fim de direcioná-los para o objetivo em comum que estão buscando por meio de uma interação colaborativa. Se atentando ao roteiro da tarefa, seus alunos serão conduzidos de seus significados pessoais para os significados matemáticos. Porém, é muito importante o papel que você professor (a) desempenha ao ter domínio tanto sobre os significados pessoais quanto matemáticos. Você pode utilizar os signos de artefato elaborados pelo grupo para orientar a evolução deles ao que é reconhecível como matemática (BUSSI; MARIOTTI, 2008).

Em relação à forma de participação dos seus alunos pelo chat, é importante que estejam trabalhando de forma colaborativa. Isto difere de cooperarem entre si, em que cada um faz uma parte e o produto é a soma das partes realizadas por cada um. Nosso foco com a interação colaborativa é que haja menos competição e mais colaboração, ao passo que há um esforço conjunto seguindo um raciocínio, compartilhando e negociando ideias. No contexto da interação colaborativa, as descobertas individuais passam a ser um produto do coletivo constituído (BAIRRAL; BARREIRA, 2017).

Em interações pelo chat, as formas de interlocução podem assumir propriedade avaliativa (busca julgar a resposta do outro de forma mais crítica), ou interpretativa (o propósito é entender

⁶ Utilizaremos o termo “artefato” para nos referir ao tipo de tecnologia para o qual estamos atribuindo uma forma de uso. Em nossos caso o VMT é o artefato e podemos utilizar especificamente a malha quadriculada ou o controle deslizante como sinônimo para o mesmo artefato, sendo assim nos referiremos em alguns momentos ao controle deslizante como um artefato por pertencer ao VMT e não sobre outro tipo de artefato no qual o seu uso pode diferir do VMT.

⁷ A noção do que são signos é muito ampla, podendo ser desde figuras, gestos, palavras etc. De forma geral, signo é tudo o que gera algum significado.

o que o outro interlocutor está dizendo ou pensando, normalmente, por meio de perguntas), ou informativa (com intuito de informar ou esclarecer alguma dúvida) ou negociativa (objetiva questionar e convencer a fim de chegar a um ponto em comum). Você professor (a) pode se atentar às propriedades de interlocução presentes durante a tarefa, de forma a estrategicamente conduzir seus alunos a um discurso de aspecto mais negociativo.

Por fim, outra perspectiva tratada pelos autores é a forma de arrastar com objetivos diferentes. As modalidades de arrasto podem fornecer informação quanto ao processo cognitivo dos alunos. Dependendo da forma de arrastar, o aluno pode estar em um estágio da resolução da tarefa (descoberta, construção ou validação de conjecturas). Dependendo dessa modalidade, o aluno pode estar em um processo ascendente (partindo da construção para a teoria) ou descendente (da teoria para a construção). Relacionamos essa discussão na tabela 1.

Tabela 1: Síntese de modalidades de arrastar e processos cognitivos envolvidos

Fases da resolução do problema	Modalidades de arrastar	Caracterização	Objetivo pretendido com seu uso
Fase de descoberta	Arrastando aleatório	Consiste em movimentar pontos livres de forma aleatória a fim de descobrir regularidades da figura construída.	Explorar uma determinada tarefa (controle ascendente)
	Arrasto limite	Similar à função de arrastar vagando, essa modalidade se aplica apenas aos pontos vinculados à figura (pontos semiarrazáveis).	Explorar uma determinada tarefa (controle ascendente)
	Arrasto guiado	Arrasta pontos livres da figura para lhe dar forma específica.	Explorar uma determinada tarefa (controle ascendente)
Construção de conjectura	Arrastando no locus fictício	O arrasto é mais intencional e permite descobrir algumas regularidades da figura, porém as propriedades locais ainda não são explícitas.	Produção de novas heurísticas e/ou reorganizador lógico de investigações precedentes (Transição de controle ascendente para descendente)
	Arrastar vinculado	O sujeito vincula um ponto ao lugar geométrico desejado e arrasta o ponto para manter a propriedade descoberta.	Torna o locus visível na tela (Transição do controle ascendente para o descendente)
Validação de uma conjectura	Arrastar curva	Marcar novos pontos ao longo de uma curva para manter a regularidade da figura.	Controle descendente
	Teste de arrasto	O indivíduo arrasta pontos livre e pontos vinculados à objetos para verificar a permanência das propriedades iniciais.	Controle descendente

Fonte: Arzarello et al. (2002)

Acreditamos que essas orientações teóricas possam guiar a implementação das tarefas de forma a possibilitar processos de pensamento potentes. O próprio professor (a) poderá promover atividades que insiram as modalidades de arrasto na cultura da sala de aula, de forma que estejam disponíveis para todos os alunos. Antes de apresentarmos a sequência didática, apontamos algumas

orientações que o você poderá optar por fazer na preparação dos alunos às tarefas. Professor (a), você pode orientar seus alunos desde o início ou no decorrer da tarefa a:

- Organizarem-se para a realização a tarefa (quem inicia, quem fará o que);
- Solicitarem o controle para construir um novo objeto ou arrastar os pontos da figura pelo uso do controle “Take Control”;
- Utilizarem o chat para apontar suas observações e justificar cada uma delas;
- Se atentarem às medidas envolvidas na tarefa com o objetivo de construírem relações entre as propriedades observadas;
- Intervir quanto a alguma forma de arrastar que ainda não tenham explorado e possa apoiar a configuração do pensamento;

Na próxima seção apresentamos a sequência didática de acordo com a natureza da tarefa proposta e comentários de alguns tipos de descobertas matemáticas envolvidas na resolução de cada tarefa.

Atividade 1: Congruência de triângulos

Tempo estimado: 2 horas-aula

Objetivo: Investigar o conceito de congruência de triângulos pela sobreposição de dois triângulos e identificação de ângulos e lados correspondentes.

1. Habilitem a malha do GeoGebra através do ícone . Seleccionem a opção “Exibir Malha” e a seguir em “Malha Principal”.
2. Construam um triângulo qualquer **ABC** usando o ícone .
3. Meçam os ângulos internos do triângulo **ABC** construído seleccionando .
4. Seleccionem  para encontrar a medida de cada lado do triângulo.
 - a) Com a ferramenta  seleccionada, movimentem livremente os pontos dos vértices do triângulo e comentem o que vocês observam.
5. Construam um triângulo qualquer **DEF** repetindo os passos anteriores.
 - b) O que vocês observaram ao compararem o comprimento dos lados e dos ângulos dos triângulos **ABC** e **DEF**?
 - c) Com a ajuda da malha, movimentem os vértices do triângulo **ABC** com , de forma que o triângulo **ABC** coincida exatamente com o triângulo **DEF**.
 6. Deem um toque no centro do triângulo e o arrastem para o lado.
 - d) Comparando a medida dos ângulos e lados: o que vocês podem dizer sobre as características dos triângulos que se sobrepõem?
 - e) Observem e comentem no chat, quais são os ângulos correspondentes dos triângulos **ABC** e **DEF**?
 - f) E quais são os lados correspondentes dos triângulos **ABC** e **DEF**?
 - g) A partir da construção que vocês realizaram, comentem se os triângulos **ABC** e **DEF** são ou não congruentes e justifiquem quais os motivos que os levaram a essa conclusão.

Alguns tipos de descobertas matemáticas envolvidas na resolução da tarefa 1:

- Comparação de medidas angulares e de comprimento.
- Noção de dependência e não dependência de objetos construídos.
- Correspondência dos pontos dos triângulos como condição necessária para a congruência dos triângulos.
- Igualdade dos ângulos e lados correspondentes como condição necessária e suficiente para a congruência dos triângulos.
- Construção de triângulos congruentes por superposição ou uso da malha como medida.
- Explorar tipos de triângulos formados com uso da malha quadriculada como triângulos retângulo, isósceles e outros construídos a partir da manipulação dos pontos livres.
- A noção matemática de objetos “semelhantes”, distinta “parecidos”.

Tipos de arrasto relacionados ao uso da malha quadriculada⁸:

- **Arrasto aleatório:** o arrasto livre dos pontos de ABC e DEF nos passos **a)** e **b)**, combinados com a observação das medidas angulares e lineares, pode ocorrer de evidenciar as propriedades de cada triângulo individualmente. Como nosso objetivo é compará-los diferenciando e depois igualando suas medidas, esperamos que os alunos usem neste momento o arrasto aleatório. Por ser um momento crucial, talvez seja necessária a intervenção do professor em caso de ficarem perdidos. Você pode solicitar que eles façam uma justificativa sintetizando suas observações destes dois itens e assim voltem sua atenção para o roteiro da tarefa, retornando ao objetivo da tarefa.
- **Arrasto guiado:** o uso desta modalidade de arrastar é comum na sequência ao arrasto aleatório, pois primeiro foi explorado de forma mais geral e depois se supõem a possibilidade e igualá-los. Assim, os alunos podem utilizar a malha quadriculada para formar triângulos específicos como triângulos isósceles, isósceles retângulos, triângulos retângulos e outros tipos. Reforçamos que a expectativa para essa tarefa é a formulação de justificativas baseadas em observações de propriedades e relações mais globais.

⁸ Ilustramos as duas formas de arrastar na tarefa 1 que identificamos em nossa pesquisa. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1J52rEzUIsoK1TyNQwul5M1IwF2UD20eg/view?usp=sharing>.

Atividade 2: Razão de semelhança

Tempo estimado: 2 hora-aula

Objetivo: Distinguir componentes de variação e covariação de dois triângulos semelhantes por meio da comparação das razões de seus lados correspondentes.

1. Vamos criar um parâmetro numérico. Seleccionem a ferramenta  e cliquem no canto superior da tela do GeoGebra. Ao abrir uma nova aba, coloquem o valor **0** (zero) na caixa “min” e após apertem “OK”.

2. Construam um triângulo **ABC** com  e meçam seus ângulos internos e o comprimento dos lados.

3. Criem um ponto **D** fora do triângulo **ABC** utilizando .

4. Seleccionando , apertem no centro do triângulo **ABC** e em seguida deem um toque no ponto **D** que está fora do triângulo **ABC**. Ao aparecer a caixa *Homotetia* abaixo de “fator”, digitem “a”. Em seguida pressionem “ok”.

5. Seleccionem  e em seguida aumentem e diminuam os valores de “a” e observem.

a) O que aconteceu com o triângulo **A'B'C'** quando vocês modificaram os valores de “a”?

6. Após a construção do triângulo **A'B'C'**, meçam seus ângulos internos.

7. Com a opção  movam livremente os vértices do triângulo **ABC** e observem.

b) Comparem os ângulos correspondentes dos dois triângulos, o que vocês observam?

8. Comparem os comprimentos dos lados do triângulo **A'B'C'** com os lados correspondentes do triângulo **ABC**. O que vocês observam?

9. Calculem a razão dos demais lados correspondentes. Para isso, insiram no campo de entrada a razão do segmento **A'B'** por **AB**.

c) Qual é a relação entre as razões calculadas?

d) Alterando o valor de “a”, o que vocês observaram ao compararem seu valor às razões calculadas anteriormente?

e) Qual a relação entre os comprimentos dos lados dos triângulos **A'B'C'** e **ABC**?

10. Para finalizar, modifiquem o valor de “a” para 1 e movimentem os vértices do triângulo alterando seus ângulos e comprimento dos lados.

f) O que essa atividade difere ou enriquece com a atividade que vocês vivenciaram na seção anterior?

Alguns tipos de descobertas matemáticas envolvidas na resolução da tarefa 2:

- Noção de dependência de objetos construídos;
- Identificar o centro de homotetia;
- Identificar relação da distância do triângulo original e do triângulo homotético ao centro de homotetia;
- Relacionar arrasto do controle deslizante em casos degenerados, $a=1$ e $a=0$;
- Comparação do componente ângulos;
- Comparação do componente medidas dos lados;
- Razão entre os lados correspondentes, noção de razão como fração;
- Proporcionalidade dos lados correspondentes;
- Relacionar triângulos com mesma forma e componentes angulares iguais como critério suficiente para triângulos semelhantes;
- Relacionar triângulos com mesma forma e componentes angulares e de comprimento iguais como critério necessário e suficiente para triângulos congruentes;
- Recorrer a valores distintos do controle deslizante para verificar razão de semelhança.
- Relacionar conceito de semelhança a homotetia de ponto (ex: $A'B'=a*AB$)

Tipos de arrasto relacionados ao uso do controle deslizante⁹:

- **Arrasto amplo:** Consiste em arrastar o controle deslizante desde o valor mínimo até o máximo, quantas vezes necessário, a fim de descobrir padrões mais genéricos entre a figura em movimento e os demais objetos que não estão em movimento. Exemplo: distâncias, tamanho e tipo de movimento.
- **Arrasto guiado local:** Em comparação com o arrasto amplo, este tipo é mais pausado e busca descrever casos especiais observados durante o arrasto amplo, subdividindo em situações, sejam valores específicos ou intervalos que denotam um dado evento, cujo motivo de ocorrência ainda não se encontra muito claro. Exemplo: intervalo de 1 a 5¹⁰ e casos degenerados como $a=0$ (razão de semelhança igual a zero e triângulo $A'B'C'$ some).
- **Teste de controle:** O movimento de arrastar o controle deslizante, tem por objetivo verificar a permanência das propriedades inicialmente identificadas. Exemplo: utilizando o controle deslizante no valor 3 e depois no valor 4 para comprovar que a razão entre os lados correspondentes se mantém.

⁹ Exemplificamos as formas de arrastar no controle deslizante em um vídeo. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1nmNZfxso_mR0O3jF7ptpM195UIFoSA3Z/view?usp=sharing.

¹⁰ O intervalo [1,5] contém os valores $a=0$ e $a=1$, assim, as situações podem ocorrer em intervalo separados. Sugerimos que você explore a diversidade de intervalos e o objetivo dos alunos ao arrastar nestes intervalos.

Atividade 3: Casos de semelhança de triângulos

Tempo estimado: 1 hora/aula

Objetivo: Verificar situações necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes a partir da exploração do caso de semelhança de triângulos Ângulo-Ângulo (AA).

1. Habilitem a malha do GeoGebra através do ícone . Seleccionem a opção “Exibir Malha” e após na opção “**Isométrica**”.
2. Construam um triângulo **ABC** com . Clicando com o botão esquerdo dentro do triângulo, escolham uma cor selecionando .
3. Meçam **apenas dois ângulos internos** do triângulo **ABC**.
4. Em seguida, construam um triângulo qualquer **DEF** e meçam **apenas dois ângulos internos**.
5. Posicionem os pontos **D**, **E** e **F** de forma que o triângulo **DEF** seja semelhante ao **ABC**.
 - a) Observem a construção dos triângulos **ABC** e **DEF**, e expliquem porque vocês consideram que eles são semelhantes.
6. Meçam os ângulos e os lados que ainda não foram medidos nos dois triângulos.
 - b) Agora que vocês sabem as medidas dos ângulos internos e dos lados, o que vocês podem dizer em relação a todos os triângulos que têm dois ângulos internos iguais?
 - c) O que essa atividade difere ou enriquece das atividades que vocês vivenciaram nas seções anteriores?

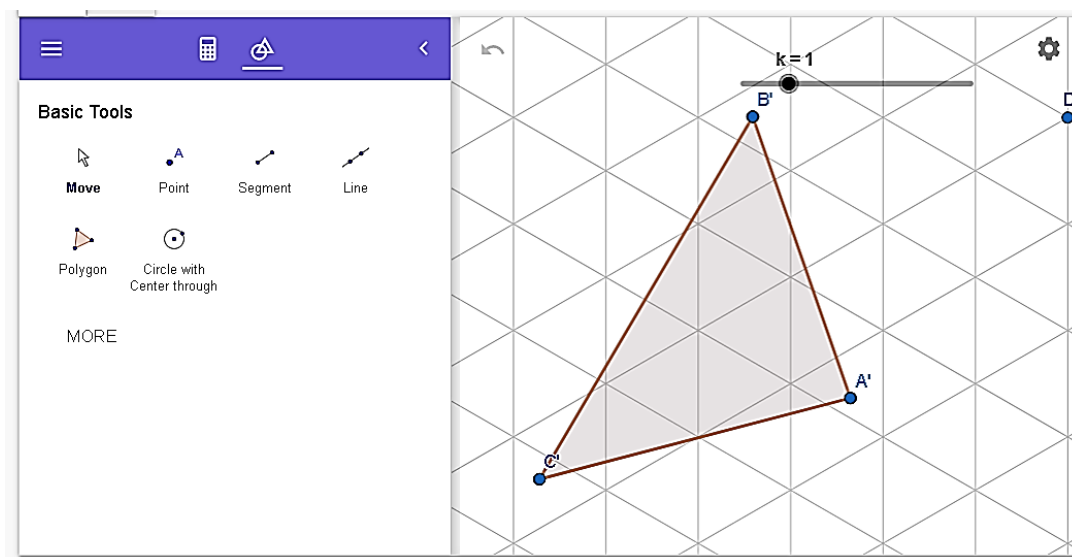
Alguns tipos de descobertas matemáticas envolvidas na resolução da tarefa:
• Uso da linguagem matemática para atribuir semelhança e congruência. • Quantidade mínima de dois componentes angulares obrigatórios para definir a semelhança entre dois triângulos (caso AA). • Explorar outras combinações de componentes (lados e ângulos) necessários para definir semelhança de triângulos (outros casos de semelhança). • Explorar casos de semelhança em tipos de triângulos como equiláteros, isósceles e outros formados pelo uso da malha isométrica. • Relacionar área de triângulos semelhantes com o quadrado da razão de semelhança.

Atividade 2 (natureza aberta): Razão de proporcionalidade

Observem os triângulos ABC e $A'B'C'$ construídos e as informações disponíveis no campo algébrico (à esquerda). Em seguida, movam o controle deslizante “ k ” e os pontos livres no campo geométrico. Façam as observações e, para cada uma, apresentem uma justificativa.

Sugerimos o carregamento do arquivo em formato .ggb¹¹ para que os estudantes já iniciem a tarefa investigando os triângulos construídos. É possível inserir um arquivo de duas formas possíveis. Primeiro: você criar uma sala e após nomeá-la aparecerá uma tela solicitando a versão do GeoGebra desejada. Clicando em “Escolher arquivos” e selecionando a figura da pasta, será possível escolher em seu computador o arquivo desejado. Em seguida a tela inicial da tarefa 3 (natureza aberta) é ilustrada pela figura 5.

Figura 5: Interface da tarefa 3 (natureza aberta)



Fonte: captura de tela do VMT

Atividade 3 (natureza aberta): Casos de semelhança de triângulos

Construam um triângulo ABC qualquer e uma reta r paralela ao lado BC que intercepte os lados AB e AC . O que vocês podem dizer sobre os triângulos ABC e ADE ? Justifiquem.

¹¹ Os arquivos em formato .ggb estão disponíveis nos links a seguir.

Atividade 2 – Disponível em: https://1drv.ms/u/s!Ag8vQaRpJoVKzkDzDCiq5_ic5wrt?e=br5uFn.

A atividade 3 de natureza aberta foi inspirada no mesmo formato desenvolvido por Marques e Bairral (2014). A tarefa foi pensada para que os (futuros) professores construíssem o triângulo ABC e em seguida investigassem livremente as propriedades dos triângulos. O enunciado da tarefa foi desenvolvido no Teorema Fundamental da Semelhança que enuncia que “Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro” (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 200-201).

Acreditamos que esse tipo de tarefa possa suscitar formas de justificar que partam tanto da teoria para a construção como da construção para a teoria (processos ascendentes e descendentes). Sugiro que o professor (a) identifique se os estudantes estão justificando suas observações, pois caso tenham realizado as tarefas anteriores da sequência didática, alguns alunos podem não ver a necessidade de justificar a semelhança de triângulos e apenas informem que são semelhantes. É importante que os aprendizes não se atentem apenas a figura final, podendo incorrer na falta de motivação para continuar investigando. Nesse caso, eu recomendo que você conduza a atenção deles de volta para os procedimentos de construção e assim construam suas justificativas.

O deslocamento do foco da figura final para o procedimento que a gerou possibilita abertura para justificativas dos estudantes com base na perspectiva teórica (MARIOTTI, 2000), passando de observações de objetos e suas medidas para análise de propriedades dos objetos, relações entre os objetos e relação entre relações (GATTEGNO, 1987).

Salvando os dados

Neste material ressaltamos a importância das estratégias discursivas, de formas de arrasto e de evolução de signos do contexto do artefato para o contexto matemático. Todos esses processos descritos não ocorrem automaticamente, sendo necessário um projeto didático cuidadoso que apoie os alunos nesses ambientes. Por este motivo propomos as tarefas com intuito de que você professor (a) o utilize no planejamento. Entretanto, é importante que sejam feitas as devidas adaptações de acordo com o andamento da turma, do tempo disponível e dos objetivos propostos para a aula.

Caso você queira desenvolver estas e outras tarefas de sua própria autoria a partir do VMT, recomendo algumas dicas que podem te ajudar. Primeiro é importante que você tenha em mente o tipo de tarefa que deseja realizar, levando em conta as distinções entre as tarefas de natureza fechada e as de natureza aberta. A primeira mais direcionada para os tópicos definidos que apontam para o objetivo final (ex: congruência, razão de semelhança e critérios de semelhança), e a segunda mais livre proporcionando a investigação das propriedades e relações de uma figura.

Em segundo lugar você deve levar e conta o chat como o espaço em que o compartilhamento de significados envolve o grupo como um todo. Eu recomendo que você utilize verbos sempre na terceira pessoa do plural como uma forma de envolver o grupo com um coletivo constituído.

No caso das interações entre os participantes, é comum que surjam muitas vezes perguntas como “você concorda ou discorda?”, porém este tipo de pergunta não é indicada para promover a interação negociativa. Questionamentos são bem-vindos, porém não em excesso. Invés de “concorda ou discorda?” perguntas como “o que você quer dizer com...?” ou “por que você acha que...(tal propriedade ocorre)?” podem ser mais produtivas para a interação entre os alunos.

Uma funcionalidade importante do VMT que auxilia os participantes em não se perderem é o botão de referência de postagens (figura 2, *referencing*). Esse botão habilita a referência de postagens no chat e também pode ser usada para referenciar algum objeto presente na zona gráfica. Esse recurso é muito útil em casos de questionamentos sobre algum objeto ou alguma parte específica da figura que não se pode explicar tão facilmente por meio de registros escritos.

Por fim você poderá listar os objetivos específicos para sua tarefa a partir de um objetivo geral e construir o seu roteiro da tarefa. É muito proveitoso inserir comandos no enunciado de tarefas abertas como por exemplo “façam observações e, para cada uma, apresente uma justificativa”. O enunciado da tarefa pode ser inserido tanto no menu de edição (figura 3), como pode ser criada uma nova aba no VMT e inserindo um documento em formato PDF. Assim os participantes podem construir em uma aba e observar as orientações na outra.

Não temos a pretensão de propor o uso do VMT como a única maneira possível de desenvolver conceitos sobre semelhança ou ainda que todas as atividades devem ser feitas em sala de aula com o VMT. Porém, entendemos que se trata de mais uma possibilidade para abordagem nas aulas, e mais um campo de exploração de conceitos matemáticos.

É importante esclarecer também que o VMT é um ambiente em que nem o professor ocupa o centro do processo de ensino-aprendizagem como detentor do conhecimento, e nem o aluno é passivo. Em sua própria estrutura, o VMT possibilita que o conhecimento matemático seja construído de forma coletiva e colaborativa. Mas por sabermos que as atividades desenvolvidas tradicionalmente em sala de aula não costumam envolver esses elementos, é necessário inserir novas práticas para aprender e ensinar matemática, seja envolvendo os seus alunos de forma mais negociativa na participação das tarefas, seja ensinando algumas estratégias que compõem as modalidades de arrastar ou apontando signos do artefato que possibilitam uma conexão com os conceitos matemáticos. Essas práticas podem ajudar inclusive no acompanhamento das mudanças nos processos cognitivos dos seus alunos.

Esperamos que o conteúdo deste material seja proveitoso para você e para suas turmas.

Referências

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F.; PAOLA, D.; ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. **ZDM**, 34(3), 66-72, 2002. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/225443259_A_cognitive_analysis_of_dragging_practises_in_Cabri_environments>. Acesso em: 15 jun. 2021.

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, 6(2), 46-64, 2017. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35378/24305>>. Acesso em: 19 nov. 2020.

BAIRRAL, M.; MARQUES, F. Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? Futuros professores de matemática interagindo no ambiente VMT com GeoGebra. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, 18(1), 2016.

BUSSI, M. G. B.; MARIOTTI, M. A. **Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective**. In Handbook (pp. 746-783).

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. Volume 9. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 1993.

GATTEGNO, C. **The science of education: Part 1: Theoretical considerations**. 2.ed. New York: Educational Solutions, 1987.

GONZÁLES, R. L. **Proporcionalidad geométrica y semejanza**. Grupo Beta. Síntesis: Madri, 1990.

JACONIANO, E. A. et al. Resolução de problemas de proporcionalidade por meio da redução à unidade. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 24, n. 61, p. 98-113, jan./mar. 2019. Disponível em: <<http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/1010>>. Acesso em: 13 nov. 2019.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria: Comprimento, área, volume e semelhança**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção do professor de matemática)

MACHADO, N. J. **Semelhança não é mera coincidência**. São Paulo: Scipione, 2000.

MARIOTTI, M. A. **Introduction to Proof: the Mediation of a Dynamic Software Environment**. Educational Studies in Mathematics, v. 44, 2000. p. 25-53.

MARQUES, F. d. J. R.; BAIRRAL, M. A. Futuros Professores de Matemática Interagindo em um Ambiente Virtual com o GeoGebra. **Educação Matemática em Revista** (41), 5-18, 2014. <Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24076/pdf>>. Acesso em: 19 nov. 2020.

PEREIRA, M. F. F. **Uma sequência didática para ensino de semelhança de figuras**. 2017. 166f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Mestrado Profissional, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

POWELL, A. B. Construção colaborativa do conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo de professores de matemática. **Boletim Gepem**. N. 64, p. 1-19, 2014. Disponível em: <doi:10.4322/gepem.2015.007>. Acesso em: 11 nov. 2020.

SALLES, A. T.; BAIRRAL, M. A. Interações docentes e aprendizagem matemática em um ambiente virtual. **Investigações em Ensino de Ciências (IENCI)**, 17(2), p.453 – 466, 2012.

Caso você queira conhecer outra dissertação defendida no PPGEduCIMAAT usando o VMT leia:

MARQUES, F. J. R. Arquetando com Alunos do Ensino Médio Argumentos sobre Quadriláteros em um Ambiente Virtual com GeoGebra, 2019. 117p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2019. Disponível em:

<<https://cursos.ufrrj.br/posgraduacao/ppgeducimat/files/2019/12/Felipe-de-Jesus-Ribeiro-Marques.pdf>>.

Acesso em: 01 jul. 2021.

Apêndice I – Mapa conceitual da criação de cursos e salas no VMTcG

