

Publicado no Boletim GEPEM n. 38, pp. 95-110, fev/2001.

Movendo discos, construindo torres e matematizando com futuros professores¹

Marcelo Almeida Bairra²

Introdução

A formação de professores, tanto a inicial como a continuada, constitui desafio permanente das instituições formadoras e a cada vez mais estão em evidência os processos de formação docente. O processo de matematização³ tem sido o meu foco com licenciandos em matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro⁴. Considero matematizar como um processo construtivo, fortalecido pela interação pessoa/grupo no qual as idéias matemáticas constituem e são constituídas de significações, a partir do que "falam" (gesticulam, desenham ou qualquer outra maneira de representar e comunicar suas ideias) meus alunos. Nesta perspectiva, complementa (Powell, 1996) matematizar é um processo natural, inerente ao ser humano e que deve ser propiciado desde a infância e depende da capacidade que todos os seres humanos têm, de tomar consciência de um evento ou acontecimento.

Assim, o que pretendo aqui é contribuir com esta reflexão relatando uma experiência como professor da disciplina de Prática de Ensino de Matemática. A disciplina, com carga horária teórico-prática de 60 horas, tem como objetivos, dentre outros, propor diferentes jogos como detonadores do processo de matematização e refletir sobre a prática avaliativa em matemática. Integrando jogo, processo ensino-aprendizagem de matemática e avaliação, enfatizando a utilização de diários de campo (individuais e coletivos) como instrumentos avaliativos potencializadores, segue minha reflexão.

O jogo e a prática em sala de aula

Por ser o jogo uma atividade inata às crianças, o professor deve aproveitar o seu caráter lúdico para fazer com que o processo ensino-aprendizagem, em especial o de matemática, seja mais motivador e divertido, sem que essa prática pedagógica seja confundida com falta de proposta educativa. Segundo Giménez e Rosich (1998) um jogo possui as características de vertente lúdica, fator de azar, tempo limitado e conteúdo

¹ Agradeço as contribuições e colocações do amigo Arthur Powell (Rutgers University, USA)

² Professor do Instituto de Educação da UFRuralRJ, e-mail: mbairral@ufrj.br

³ Reflexão propiciada com Powell (1996)

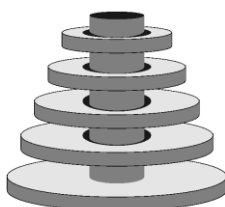
⁴ BR 465 km 7 CEP. 28970-000 Seropédica-RJ <http://www.ufrj.br>

curricular implícito. Como *componente lúdico*, o jogo proporciona um valor motivacional de atitudes e de predisposições ao livro didático. No mais, fomenta o processo de socialização, uma vez que tem um componente social indubitável por estabelecer efetivas reações de aceitação, cumprimento de regras, etc. O *azar* é um dos elementos sociais principais que tem o jogo, por desenvolver no aluno o hábito ganhar/perder como inerente ao processo. O *tempo* e o *número limitado de movimentos* de um jogo faz com que seja possível utilizá-lo também como base de situações didáticas e o *conteúdo curricular* (conceitos, procedimentos e atitudes) do jogo não pode ficar em segundo plano.

Utilizo jogo com futuros professores de matemática com o objetivo de que eles reconheçam-no como um recurso manipulativo importante, porém com a características diferentes de outros materiais didáticos e que o licenciando perceba também a importância de incorporá-lo como instrumento "sério" em sua sala de aula, para uma busca e desenvolvimento de "idéias matemáticas". Além de promover a socialização e despertar o espírito investigativo, importantes no processo de matematizar, provocará mudanças de atitude frente ao erro. Ou seja, professor e aluno passarão a reconhecer o erro como potencial no processo de matematização.

Nesta perspectiva, um dos jogos que utilizo na disciplina é a Torre de Hanoi, bastante conhecido pelos professores. Este jogo é baseado num mito indiano. O mito (Ferrero, 1991; Machado, 1992) do templo de Benarés, no qual Deus no momento da criação, colocou 64 discos de ouro puro, todos de tamanhos diferentes, colocados em uma das três agulhas de diamante que haviam fixadas numa placa de cobre. O maior disco seria a base da torre e o menor seu topo: era a Torre de Brahma. A tarefa dos sacerdotes do templo seria transportar a torre para outra agulha de diamante, movendo um disco de cada vez, e nunca colocando um disco maior sobre outro menor. Ainda, segundo o mito, quando a tarefa fosse cumprida o mundo desapareceria.

Assim considerando o caráter motivador intrínseco ao jogo Torre de Hanoi, seu aspecto investigativo e que se adapta a diferentes séries, suas **regras** são: mover um disco de cada vez e nunca um maior pode ficar sobre o menor e, o **desafio** é descobrir o número mínimo de movimentos que podem ser realizados para mover determinada quantidade de discos de uma torre a outra. O jogo é encontrado facilmente em lojas de materiais pedagógicos, mas também pode ser construído pelo próprio professor utilizando madeira, cartolina, papelão ou até mesmo moedas. Veja a seguir a ilustração de uma torre com 5 discos.



Como também tenho incluído na temática de minhas aulas a divulgação e busca de *sites* em matemática, uma aluna encontrou este, que vale a pena acessar para conhecer e jogá-lo, virtualmente: <http://www.fortalnet.com.br/jogos/hanoi/hanoi.htm>

A utilização das torres de Hanoi em sala de aula, já foi muito bem apresentada por Grandó (1997), porém o que pretendo aqui é aprofundar a reflexão sobre a sua utilização com futuros professores de matemática e enriquecê-la no tocante à prática avaliativa em matemática.

A prática avaliativa em matemática com os diários de campo

Pensar em avaliação, implica mudanças nos objetivos para o processo ensino-aprendizagem, na maneira de conceber a aprendizagem, na interpretação e na abordagem dos conteúdos matemáticos, num trabalho docente que deve incluir uma variedade de situações de aprendizagem (PCN, 1998). Despertado e influenciado por Powell e López (1995) sobre a importância da escrita no ensino-aprendizagem de matemática comecei a utilizar em minhas aulas o instrumento de avaliação que é o diário de campo⁵. A seguir, o roteiro (Bairral e Giménez, 2000; D`Ambrósio, 1996) que sugiro aos licenciandos para a elaboração dos diários.

<p>Data</p> <p>Carga horária</p> <p>Tema principal da aula</p> <p>Palavras-chave</p> <p>Qual(is) foi(ram) o(s) objetivo(s) da(s) aula(s)?</p> <p>O que você aprendeu? O que precisa de esclarecimento?</p> <p>Descreva brevemente um momento especialmente significativo no desenvolvimento da aula.</p> <p>Identifique algo que te surpreendeu, que te fez refletir, levantar perguntas, etc.</p> <p>Procure explicar algo que te deixou confuso, alguma dificuldade encontrada, uma dúvida ou pergunta não esclarecida.</p> <p>Sugestões e outros comentários que considere importantes.</p> <p>Bibliografia (utilizada, sugerida, ...)</p> <p>Valore de 1 a 10:</p> <p>A aula como um todo:</p> <p>O professor:</p> <p>O seu grupo:</p> <p>Os demais grupos:</p> <p>Você:</p>
--

⁵ Prefiro utilizar este termo para os diários, descrevem, sua escrita dos diários de Hanoi é comum o aluno escrever "conhecemos a Torre de Hanoi" então, o que enfatizo é que o meu interesse é saber o que ele aprendeu, ou não, no trabalho com a torre. Assim, prefiro não utilizar o termo relatório, pois para mim é um texto mais que descritivo. A ideia de diário de campo vem da pesquisa qualitativa.

As idéias de D`Ambrósio (1996) também foram orientadoras para adaptação do instrumento à dinâmica da disciplina e, como critérios de avaliação utilizo:

Principais

Prazo de entrega.
Compreensão e explicitação dos temas abordados: perceber o que é importante destacar dentro do estudado.
Utilização do roteiro.
Resposta às colocações feitas pelo professor.

Outros

Reporte ao trabalho coletivo.
Associação de idéias com a prática, apresentando exemplos.
Capacidade de análise e síntese.
Evolução no processo de elaboração de escrita e idéias.
Dúvidas levantadas e esclarecimentos solicitados.
Críticas e sugestões feitas.
Organização e apresentação.
Vocabulário e coerência na escrita.
Referência bibliográfica.

A seguir, apresento parte dos relatos dos grupos. Os licenciandos trabalharam em grupo de, no máximo, 4 alunos e cada grupo tinha pelo menos uma torre. Normalmente não interfiro na formação dos grupos, mas considero importante o professor intervir nesta formação, principalmente em turmas com número grande de alunos, o que não foi o meu caso. As turmas de Prática de Ensino tem tido em média dezoito alunos por semestre. Ao todo foram utilizadas 5 (cinco) aulas e os alunos deveriam relatá-las em grupo (diário do grupo) e individualmente (diário individual).

Grupo 1

Nº de discos	Nº de movimentos	
1	1	
2	3	(3-1=2)
3	7	(7-3=4)
4	15	(15-7=8)
5	31	(31-15=16)
6	63	(63-31=32)
7	127	(127-63=64)

Tabela 1

Para descobrir a quantidade de movimentos a serem feitos (MT) para um determinado número de discos, basta somar a quantidade de movimentos anteriores (MA) com a quantidade de discos que queremos mover (MD): $MT = MA + MD$.

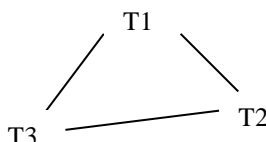
Fórmula para o movimento da torre com n discos (observe tabela 1). Sejam a_n o número mínimo de movimentos com n discos. De acordo com a tabela vemos que:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$$

Resolvendo o sistema para a_n chegamos a fórmula que determina o número mínimo de movimentos: $a_n = 2^n - 1$

Estratégias para conseguir um número mínimo de movimentos. Considere



Se quisermos mover a pilha de T1 para T2 (sentido horário) então:

- (1) se o número de discos for par, o primeiro disco deve ser colocado em T3 (sentido anti-horário)
- (2) se o número de discos for ímpar, o primeiro disco deve ser colocado em T2 (sentido horário).

Obs.: Esta estratégia serve para o movimento das torres intermediárias também”.

Grupo 2

“... Para cada disco a mais que colocamos, o número de movimentos dobrava e aumentava em 1, como mostra o esquema abaixo:

Nº de discos	Movimentos numéricos necessários
1	1 ($x2 + 1=3$)
2	3 ($x2 + 1=7$)
3	7 ($x2 + 1=15$)
4	15 ($x2 + 1=31$)
5	31 ($x2 + 1= ...$)
...	...
N	$X2 + 1$

Notemos que ao aumentarmos o número de discos, em 1 unidade, o número de movimentos dos discos, aumenta segundo uma PG de razão 2. Logo podemos determinar o número de movimentos para qualquer número de discos”.

Grupo 3

“... Variando o número de discos e tentando identificar qual o número que expressa o mínimo de movimentos necessários [...] passamos à tarefa de generalizar para um número n de discos. Veja os passos utilizados nesses raciocínios:

1º passo:

nº de discos	nº min. de mov.
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	?

2º passo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 a_1 + 1 \\ a_3 &= 2 a_2 + 1 \\ a_4 &= 2 a_3 + 1 \\ a_5 &= 2 a_4 + 1 \\ a_6 &= 2 a_5 + 1 \end{aligned}$$

3º passo:

$$\begin{aligned} a_7 &= 2 a_6 + 1 \\ a_7 &= 2 \cdot 63 + 1 = 127 \end{aligned}$$

4º passo:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 (a_{n-1} + 1) \\ n &= \text{nº de discos} \\ a &= \text{nº min. de mov.} \end{aligned}$$

6º passo: $a_n = 2^n - 1$ ”

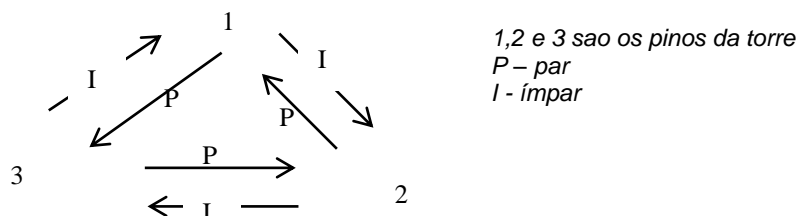
5º passo:

$$\begin{aligned} a_7 &= 2 a_6 + 1 \\ a_7 &= 2 (2 a_5 + 1) + 1 \\ a_7 &= 4 a_5 + 3 \\ a_7 &= 4 (2 a_4 + 1) + 3 \\ a_7 &= 8 a_4 + 7 \\ a_7 &= 8 (2 a_3 + 1) + 7 \\ a_7 &= 16 a_3 + 15 \\ a_7 &= 16 (2 a_2 + 1) + 15 \\ a_7 &= 32 a_2 + 31 \\ a_7 &= 32 (2 a_1 + 1) + 31 \\ a_7 &= 64 a_1 + 32 + 31 \\ a_7 &= 64 + 32 + 31 \\ a_7 &= 2^{7-1} + 2^{7-2} + 2^{7-2} - 1 \\ a_7 &= 2^{7-1} + 2 (2^{7-2}) - 1 \\ a_7 &= 2^{7-1} + 2^{7-1} - 1 \\ a_7 &= 2 (2^{7-1}) - 1 \\ a_7 &= 2^7 - 1 \end{aligned}$$

Grupo 4

Quantidade de discos das torres(n)	Quant. de movimentos das peças nas torres							Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	Pç 7	
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	0	31
6	32	16	8	4	2	1	0	63
7	64	32	16	8	4	2	1	127

- A quantidade mínima de movimentos das torres com n discos é igual a soma de uma P.G. finita de razão 2, 1º termo igual a 1 e com n° de termos igual ao n° de discos da torre.
- Ao movimentarmos o número de discos, a quantidade de movimentos de cada peça cresce em P.G. de razão 2, com 1º termo igual a 1.
- O n° de movimentos de uma torre com n discos é igual ao dobro de movimentos da torre com $(n-1)$ discos acrescido de 1 movimento.
- Condições para os movimentos das peças para obtermos o mínimo possível. Consideramos as peças/discos numerados de 1 a 7. Dividimos a torre de Hanoi conforme o esquema abaixo:



- ✓ as peças ímpares se movimentam seguindo a ordem crescente dos pinos partindo do n° 1
 - ✓ as peças pares se movimentam seguindo a ordem decrescente dos pinos partindo do n° 1
- A tabela apresentada anteriormente forma uma matriz triangular inferior, com a diagonal principal contendo todos os termos igual a 1, apresentando 7 divisores do n° 64
 - O número de divisores de 64 contido na matriz é igual ao número de discos da torre de Hanoi.
 - A matriz é quadrada e de ordem 7.

1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
4	2	1	0	0	0	0
8	4	2	1	0	0	0
16	8	4	2	1	0	0
32	16	8	4	2	1	0
64	32	16	8	4	2	1

É interessante observarmos nos diários o objeto matemático "priorizado" por cada grupo e como os alunos vão desenvolvendo suas idéias e construindo o seu texto matemático⁶. Neste processo, ressalto a importância do desafio próprio do jogo e no trabalho em grupo, pois as discussões e as diferentes colocações de cada aluno enriquecem esta dinâmica e os diferentes estilos, o que não poderia deixar de ser:

⁶ Ver Lins e Giménez (1997)

diferentes alunos, diferentes discussões, diferentes registros e diferentes conteúdos contextualizados.

Sem o objetivo de uma análise mais aprofundada destacarei algumas observações que considero relevantes. A escrita bem organizada e detalhada do **grupo 3** mostra que os licenciandos conseguiram generalizar através de uma investigação apoiada na recursividade. O texto do **grupo 4** me chama atenção por sua análise considerando também a quantidade de movimentos de cada peça e como isso contribui para determinar o número total de movimentos. Ao observarem sobre o movimento de cada peça e disporem estas observações em forma de tabela, os licenciandos passam a centrar sua atenção na matriz que fica formada e fazem mais destaques sobre esta disposição. Além de construir um sistema de equações a partir do que observa na tabela o **grupo 3**, como o grupo 4, também construiu a estratégia para o número mínimo de movimentos a partir do sentido horário/anti-horário. Interessante também notar que o **grupo 2** se deu como convencido para determinar o número de movimentos apoiados no termo anterior, sem perceber a necessidade do termo geral. Além de existirem licenciandos com dificuldade para determinar o número mínimo de movimentos, também existem aqueles que são mais imediatos e se dão por convencidos a partir de 5 movimentos, por exemplo:

<i>Nº de discos</i>	<i>Nº de movimentos</i>
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$
...	...
n	$2^n - 1$

É importante verificar o matematizar de cada licenciando e discutir com eles esse processo. Uma preocupação dos licenciandos é fazer comparações do tipo melhor ou pior e, então, enfatizo para eles o tempo todo que não é meu objetivo estabelecer comparações do tipo saber mais/menos, mas que eles percebam, analisem e respeitem o matematizar do seu companheiro e contribuam com a continuidade desse processo, pois ensino-aprendizagem é um processo contínuo de *aprender a aprender e aprender a ser*, fortalecido pelas relações interpessoais e não mera acumulação acrítica de conhecimentos.

Após o trabalho em pequenos grupos, no qual vou esclarecendo dúvidas, analisando processos de raciocínio utilizados pelos licenciandos e propondo questões, passamos a analisar os diários de cada grupo, ou seja, cada grupo analisa o texto do outro e, ao final, fechamos a discussão com toda a turma. Por exemplo, veja a observação do *grupo 3* sobre o diário do *grupo 1*.

“A princípio discordamos com o tipo de referencial, horário e anti-horário, que o grupo usou. Só partimos para a prática (testamos na torre) e verificamos que funciona para n movimentos e n número de peças. Este fato não ocorreu em nenhum dos membros do nosso grupo, o que observamos que facilita em fazer o menor número de movimentos”

Podemos observar na escrita do grupo que além de compreenderem, inicialmente discordando do texto do outro o grupo, os licenciandos foram verificar se realmente aconteceriam as observações feitas. Alguns sentem necessidade de voltar ao jogo enquanto outros o fazem direto no papel. Além de se darem por satisfeitos, reconhecem a importância do referencial (sentido horário ou anti-horário) para determinar o número mínimo de movimentos. O que considero importante aqui é que do professor fazer este tipo de observação, o licenciando tem a oportunidade de verificar como pensaram os seus colegas. Estes diferentes momentos *escrita-reflexão-nova escrita* favorecem a matematização do futuro professor.

Vale destacar que os licenciandos encontram dificuldade na escrita, seja de um diário com ideias mais matemáticas ou não. Assim, a dinâmica de ler criticamente, recebendo e colocando questões, seja do próprio diário ou do(s) colega(s), é imprescindível, pois enriquece e propicia melhora no seu processo de escrita, na medida em que lê outro tipo de texto, fazendo críticas com argumentos e discutindo-os com toda a turma. Neste momento ele assume o papel de professor na medida em busca compreender o que escreveu o seu amigo (aluno!) e coloca questões e, até mesmo, busca reconhecer suas dificuldades ou facilidades. Considero importante colocar o licenciando neste papel professor-aluno, constantemente.

A aula seguinte: um diário coletivo⁷

Além dos diários construídos coletivamente em algumas aulas, cada aluno possui o seu caderno de diário de campo que deverá ser entregue em data acordada desde o início da disciplina. Neste caderno o licenciando relata cada aula. Recolho todos os diários na data marcada, faço a leitura de cada um e as devidas colocações (perguntas, elogios, pede esclarecimentos, ...). Em seguida, monto o diário coletivo colocando as ideias dos licenciandos em “relativa” sequência. Na aula seguinte, distribuo aos alunos para uma leitura conjunta com destaque, na qual o licenciando pede esclarecimentos, discorda, concorda e sugere alteração. Este momento é muito importante pois além do licenciando ficar interessado em “se localizar” no texto, fica motivado e à vontade para a discussão. Um ponto importante do diário coletivo é que o licenciando pode identificar as ideias de

seus colegas, ao passo que no caderno individual as colocações ficam apenas entre licenciando e professor. Os erros gramaticais não interferem na avaliação, porém são feitas as devidas correções.

A seguir, uma parte do diário que organizei a partir dos textos individuais dos licenciandos. Como pode ser visto, além das idéias “mais matemáticas”, destacadas nos relatos anteriores, eles também acrescentam reflexões sobre o processo ensino-aprendizagem de matemática, fruto de leituras e discussões propiciadas pela disciplina. A fala de cada licenciando é colocada em um tipo de letra e neste exemplo foi colocada apenas uma fala de cada licenciando.

“... A Educação é política, portanto trabalha valores e ideologias de quem planeja. **Sobre o processo educativo, foi falado da relação entre ensino-aprendizagem-avaliação e para que se tenha efeito positivo nas inovações é necessário que o professor mude sua forma de ensinar.** A EDUCAÇÃO TRADICIONAL ENFATIZA O FORMALISMO, O RIGOR E RESPOSTAS CERTAS ATRAVÉS DE TESTES E PROVAS ESCRITAS. ESSA AVALIAÇÃO, SEGUNDO O GRUPO, SERVE PARA AVALIAR A CAPACIDADE DE REPRODUÇÃO DOS PROCEDIMENTOS EM SALA DE AULA. Será que eu tenho sido uma autoridade do saber ou uma das autoridades do saber em sala de aula, será que eu tenho dado condições a que os alunos raciocinem ou eu como professor tenho raciocinado por ele? Preciso melhorar! **Uma aula inovadora, além do professor existe outras fontes de informação, como instrumentos didáticos, jogos, um ambiente mais descontraído, dinâmico e atrativo por parte dos alunos.** O aluno cria e o professor aprimora junto com o aluno. Nesse processo de construção o conhecimento do professor quase sempre deve funcionar como observador. **Cabe ao professor facilitar ao máximo as idéias que surgem com a apresentação dos problemas e verificar se estas idéias estão coerentes.** *⊗ conteúdo curricular é formado de atitudes, conceitos e procedimentos.* **O seminário, tinha como finalidade apresentar diferentes formas de avaliação em matemática e grupo falou e mostrou alguns exemplos como: relatório e ensaios; produtos gerados pelos alunos; teste em duas fases; pequenas tarefas orais e outras.** ... os alunos puderam concluir que as formas e instrumentos de avaliação eram válidos e que caberia a cada professor saber como usá-los. O professor apresentou o jogo Torre de Hanoi e deixou que os alunos tentassem resolver o jogo, assim terminou a aula. Foi proposto que teríamos que analisar o número mínimo de movimentos para transferirmos todos os discos de uma torre para outra, de forma que o disco maior sempre fique embaixo do menor. Observando os 5 primeiros casos, fizemos influência, através de um processo indutivo que com n discos dispomos de um número mínimo de movimentos igual a $2^n - 1$. **O número mínimo de movimentos é sempre ímpar, não importando o número de discos. O intervalo entre os números mínimos de disco dá uma P.G. de razão 2.** Outras observações que tiramos da tarefa são: utilizando as torres em forma triangular, vimos que para um número n de discos, temos que o número de movimentos do disco menor é igual a $2^n - 1$, onde o mesmo gira num sentido único (horário ou anti-horário); fixando uma das torres e um sentido de orientação para o disco menor teremos que, para um número par de discos o resultado final se dará numa torre diferente do que para um número ímpar de discos. **Enfim o material utilizado em aula desperta nos alunos o interesse em descobrir novos conceitos ou comparar a experiência com conceitos já vistos em aula.** Este tipo de material é muito importante, pois te possibilita trabalhar vários conceitos (conteúdos) distintos.

⁷ Utilizei aqui a idéia das amigas Rosana de Oliveira e Roza Mazo Reis, desenvolvida com professores do curso CAPES-FAPERJ da USU.

Alunos que “falarão” neste diário: Alexandre, Fernanda, Jecson, Josias, Leonardo Henrique, Leonardo Vieira, Marciel, Mariano, Odilon, Ricardo, Robson, Ronaldo Gregório, Ronaldo Raimundo
Relator: Marcelo Bairral, em 15 de setembro de 2000

Como ressalta Santos (1997), cada instrumento de avaliação, antes de ser utilizado pelo professor, deve ser vivenciado pelos alunos. Os licenciandos já conheciam este instrumento, pois foi proposto na disciplina anterior (Didática da Matemática), porém com uma dinâmica um pouco diferente, ou seja, realizaram em grupo e para um determinado conjunto de aulas.

Assim, como a avaliação em matemática também constitui uma das temáticas específicas da disciplina Prática de Ensino, utilizo o diário de campo como instrumento para 80% da avaliação na disciplina, para que os licenciandos vivenciem na prática os mesmos e verifiquem, como alunos, a sua importância.

Discussões finais

Quanto aos resultados expressos pelos instrumentos de **avaliação**, sejam eles provas, trabalhos, observação de postura em sala de aula, constituem indícios de competências e como tal devem ser considerados. A tarefa do professor constitui um permanente exercício de interpretação de sinais, de indícios, a partir dos quais manifesta juízos de valor que lhe permitem reorganizar a sua prática. Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios. Nesse sentido, a análise do erro pode ser uma pista interessante e eficaz.

A elaboração dos diários não é tarefa fácil, pois inicialmente grande parte dos alunos inicia um processo de escrita meramente descritivo ao dizerem o que foi a aula, ou seja, “trabalhamos com a torre de Hanoi, o professor falou sobre avaliação e o grupo apresentou o mapa conceitual”. Tenho classificado os diários em 3 tipos: *relato* (sem reflexão conceitual), *misto* (com parte descritiva maior que conceitual) e “*diário mais esperado*” (texto descritivo menor que a parte conceitual, ou seja, o licenciando fala sobre o que aprendeu, o que significava para ele e o novo significado construído, ...). Neste sentido, enfatiza Powell (1995) a escrita é uma ferramenta potencial para forçar essa reflexão conceitual. Não se trata de um trabalho fácil tanto para os licenciandos como para mim, pois além de ter que romper com a mentalidade da avaliação como medida e reprodução, com a qual fui formado e eles ainda vêm sendo, infelizmente, a leitura e a colocação de questões em cada diário, necessita tempo e reflexão, mas é muito gratificante ver o crescimento dos alunos, sua melhora na escrita, na articulação de ideias e na construção de argumentos. É claro que existem alunos com maior dificuldade que outros.

Sobre o **jogo** com recurso em matemática penso também que não adianta ressaltar a importância de sua utilização (PCN: 1997, 1998) se não for propiciada aos professores a oportunidade de vivenciar experiências de ensino-aprendizagem com os mesmos, de maneira que possam verificar sua real importância como recurso didático, passando assim, a não encará-lo apenas como recurso lúdico de utilização em aula para “passar o tempo” associado à falta de proposta educativa concreta.

Sem regras pré-fixadas, o jogo Torre de Hanoi é acessível aos alunos dos primeiros ciclos. A própria utilização pelo aluno de um tipo de registro para mostrar uma seqüência de movimentos já se constitui numa tarefa importante. Em séries mais avançadas, este jogo pode ser utilizado para o desenvolvimento de noções relacionadas ao Princípio da Indução Finita, seqüências e relações numéricas, como vimos um pouco nos diários dos licenciandos. O número de discos utilizado determina a maior ou menor complexidade do jogo.

No tocante à **matematização na formação inicial dos professores** tenho buscado estabelecer a relação teoria-prática numa ação contínua de despertar no licenciando consciência sobre *o que é matemática, o que significa saber e aprender matemática e qual a função social do planejamento em matemática*. Assim, fico feliz em vê-los refletir e explicitar, por exemplo:

“Será que eu tenho sido uma autoridade do saber ou uma das autoridades do saber em sala de aula, será que eu tenho dado condições a que os alunos raciocinem ou eu como professor tenho raciocinado por ele? Preciso melhorar!”

“O aluno cria e o professor aprimora junto com o aluno. Nesse processo de construção o conhecimento do professor quase sempre deve funcionar como observador”.

O processo de matematização acontecerá quando o professor reconhecer sua sala de aula como um espaço de diálogo e confiança, um quebra-cabeça complexo do qual ele é uma das peças e, assim, diferente e imprescindível - mas não suficiente - que se (des)constrói com muito respeito e força de vontade, para romper dificuldades próprias, ajudar o outro e contribuir com o crescimento coletivo.

Como desdobramento do trabalho com a Torre de Hanoi, analisamos jogos em livros didáticos, os licenciandos que atuam como professores utilizam o jogo em sua turma e depois relatam e analisam o que aconteceu e, com aqueles que ainda não atuam como professores, temos realizado oficinas para demais graduandos da UFRuralRJ, para normalistas e professores da região. Assim, além de se envolverem em atividade de ensino, eles refletem sobre as especificidades e dificuldades de cada situação e sobre sua prática em cada uma delas.

Concluindo fica uma reflexao e umas inquietações, principalmente para os que se dedicam à formação de professores, sobre o comentário de um dos licenciandos afirmando que “*este tipo de aula é uma aula laboratório*”, criticando um tipo de discussao e relação nao propiciadas em disciplinas de conteúdo específico ao longo de sua formação inicial, ou seja, o antigo esquema 3 (formação específica) + 1 (formação pedagógica), infelizmente ainda vigente no currículo de muitas instituições formadoras. Daí, me pergunto: *que professores estao sendo formados para enfrentar os desafios de um novo milênio? Os professores formadores tem esta consciência? O que um curso de licenciatura em matemática deve priorizar? Como fica a questão da identidade profissional docente do futuro professor de matemática?*

Referências Bibliográficas

- BAIRRAL, M. A. e GIMÉNEZ, J. *Geometria para 3º e 4º ciclos*. Seropédica: UFRuralRJ, 2000 <http://www.ufrj.br/institutos/ie/geometria/>
- D`AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática* Campinas: Papirus, 1996
- FERRERO, L. *El juego y la matemática*. Madrid: La Muralla, 1991.
- GIMÉNEZ, J. e ROSICH, N. *Jugand amb les matemàtiques de la diversitat*. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya, 1998.
- GRANDO, R. C. A construção do conceito matemático no jogo. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*. São Paulo, 1997, n. 3, p. 13-17
- LINS, R. C. E GIMÉNEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papirus, 1997
- MACHADO, N. J. *Matemática e Educação: alegorias, tecnologias e temas afins*. São Paulo: Cortez, 1992. Coleção Questões da Nossa Época, n. 2
- POWELL, A. *A Tomada da Consciência da Matematização*. Rio de Janeiro: MEM/USU, Seminário Interno, agosto de 1996
- Powell, A.B. e López, J.A. A estrita como veículo de aprendizagem da matemática: Estudo de um caso. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, 1995, n. 33, p. 9-41
- Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF (1997, 1998)
- SANTOS, V.M.P. (Coord.) *Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos*. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1997.

Para os que gostam de passear pela Internet, outros sites interessantes ...

<http://www.cut-the-knot.com/recurrence/hanoi.html>

<http://www.pangea.ca/kolar/javascript/Hanoi/algo.html>
<http://www.pangea.ca/kolar/javascript/Hanoi/HTonWebE.html>
<http://obelix.ee.duth.gr/~apostolo/TowersOfHanoi/>